線形代数学第１－期末試験＜解答例＞

電子情報学類１年生（１組）　　平成２３年度前期－ 2011.7.27 －

1. 次の命題が正しいか否かを理由を付して示せ.（配点：5 点× 5=25 点）

(a) $\boldsymbol{A}$ の行ベクトルが線形独立ならば，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つ.

＜解答例＞（配点：5 点）

正しい

$\boldsymbol{A}$ を $m\times n$ 行列とする．行ベクトルが線形独立であるから階数 $r=m$ である．ガウスの前進消去で得られる行列 $\boldsymbol{U}$ では零の行ベクトルは生じない（m 個の行ベクトルは零ではない）．また，$\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトルであるから，右辺 $=0$，左辺 $=b_i$ となる方程式は生じない．従って，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ によらず解を持つ．$r=m=n$ ならば一意解，$r=m<n$ ならば不定解となる．

(b) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つならば，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}$ に依存して一意解または不能解を持つ.

＜解答例＞（配点：5 点）

正しい

(a) で示したように，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つならば $r=m$ である．また，$m=n$ のときに一意解，$m<n$ のときに不定解を持つ．$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ では方程式（行）の数が n，未知数（列）の数が m である．$r=m$ であるから自由変数は生じない．従って，解を持つとすると一意解である．$\boldsymbol{A}^T$ をガウスの前進消去をして得られる $\boldsymbol{U}$ では上部にある m 個の行が零ではなく，下部にある $n-m$ 個の行が零となる．$\boldsymbol{c}$（ガウスの前進消去後）の内，下部の $n-m$ 次元の部分が零であれば，一意解を持ち，零でなければ不能解となる．

（参考）上記の解答例では，$m=n$ と $n<m$ をあわせて考慮しているので「$\boldsymbol{c}$ に依存して」が正しいとしていますが，$m=n$ の場合は「$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ によらず一意解を持つならば，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ も $\boldsymbol{c}$ によらず一意解を持つ」ことになります．従って，$m=n$ と $n<m$ を分けて考えるならば，次の命題が正しい「$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}$ によらず一意解または不定解を持つならば，

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{c}$ によらず一意解を持つか，または $\boldsymbol{c}$ に依存して不能解を持つ.」この意味で,「命題は正しくない」も正解とする.

(c) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が不定解を持つならば，必ず $\boldsymbol{b}$ に依存する.

＜解答例＞（配点：5 点）

正しくない

$r = m < n$ の場合は不定解を持つが，$\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去をして得られる $\boldsymbol{U}$ の行は全て零ではなく，その解は $\boldsymbol{b}$ に依存しない.

(d) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が不定解を持つならば，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ も不定解を持つ.

＜解答例＞（配点：5 点）

正しくない

$r = m < n$ の場合に $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ は不定解を持つが，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ では自由変数の数 $= m - r = 0$ であるから不定解を持たない．$\boldsymbol{c}$ に依存して一意解または不能解を持つ.

(e) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{b}$ や $\boldsymbol{c}$ に依存して不定解または不能解を持つならば，$\boldsymbol{A}$ の行ベクトル，及び列ベクトルは線形独立ではない.

＜解答例＞（配点：5 点）

正しい

$\boldsymbol{A}$ において線形独立な行ベクトルと列ベクトルの数は階数 r に等しい. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が不定解を持つならば $r < n$ であり，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ が不定解を持つならば $r < m$ である．m と n は行ベクトルと列ベクトルの数であり, $r < m, n$ であることから全ての行ベクトル及び全ての列ベクトルは線形独立ではない.

2. 以下の集合がベクトル空間であるか否かを理由を付して示せ. (配点：5 点×2=10 点)

(a) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の解ベクトルから成る集合

＜解答例＞（配点：5 点）

ベクトル空間である.

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ がこの集合に含まれるとき，$c\boldsymbol{x}_1 + d\boldsymbol{x}_2$ もこの集合に含まれることを示す.

$$\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}_1 + d\boldsymbol{x}_2) = c\boldsymbol{Ax}_1 + d\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

(b) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の解ベクトルから成る集合

＜解答例＞（配点：5 点）

ベクトル空間ではない．

$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ がこの集合に含まれるとき，$c\boldsymbol{x}_1+d\boldsymbol{x}_2$ はこの集合に含まれないことを示す．

$$\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{b} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{b} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}_1+d\boldsymbol{x}_2)=c\boldsymbol{Ax}_1+d\boldsymbol{Ax}_2=c\boldsymbol{b}+d\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b} \tag{6}$$

（参考）ベクトル空間であるための条件を満たしているか否かを式で示す必要がある．また，和に閉じている（いない）ことと，スカラー倍に閉じている（いない）ことを別々に示しても良い．

3. ベクトル空間に関して以下の問いに答えよ．(配点：5 点× 2=10 点)

(a) $\boldsymbol{R}^4$ におけるベクトルを $\boldsymbol{x}=[u,v,w,y]^T$ と表す．$u+v+w+y=0$ 及び $u-v+w-y=0$ を満たすベクトルから成る部分空間 V の基底を求めよ．

＜解答例＞（配点：5 点）

これらの条件を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ は次の方程式の解ベクトルとなる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

すなわち，部分空間 V はこの方程式の係数行列の零空間となる．この方程式を解いて次の解を得る．

$$\boldsymbol{x}=w\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

以上より，部分空間 V の基底は

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

となる．

（参考）上記のベクトルを定数倍したベクトルも基底である．

(b)　上記の部分空間 V に対する直交補空間 W を求めよ．

＜解答例＞（配点：5 点）

部分空間 V を行空間とする行列の零空間が V の直交補空間となる．次の方程式を解いて零空間を求める．

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

この方程式の解は次のようになる．

$$\boldsymbol{x} = w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

従って，部分空間 V の直交補空間 W は基底が

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

であり，次元が 2 次元の部分空間である．

4. 次の方程式を $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ と表す．この方程式が解を持つこと (*1) と，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあること (*2) が同じであることを示せ．(*1)b_1, b_2, b_3 に対する

条件．(*2)$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの線形結合で表される．(配点：10 点)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列空間にあることは，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの線形結合で表されることであるから，次のようになる．

$$\boldsymbol{b} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b-c \\ -a+3c \\ a+4b+c \end{bmatrix} \tag{13}$$

次に，方程式が解を持つ条件を考える．ガウスの前進消去により次式を得る．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 + b_1 \\ b_3 - b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

従って，方程式が解を持つ条件は

$$b_3 - b_2 - 2b_1 = 0 \tag{15}$$

となる．式 (13) を上式に代入する．

$$\begin{aligned} &(a+4b+c) - (-a+3c) - 2(a+2b-c) \qquad (16) \\ &= (1+1-2)a + (4-4)b + (1-3+2)c = 0 \end{aligned}$$

以上のように，$\boldsymbol{A}$ の列空間にあるベクトル $\boldsymbol{b}$（式 (13)）は方程式が解を持つ条件（式 (15)）を満たす．

（参考）$\boldsymbol{b}$ を表す列ベクトルとして，線形独立な列ベクトル（例えば，第 1 列，第 2 列）のみを用いてもよい．

5. 次の方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ。$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解と，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の特殊解の和の形で表せ．(配点：10 点)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞
ガウスの前進消去により，

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

w を自由変数としてこの方程式を解く．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

上式の右辺第 1 項が $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ に対する一般解，第 2 項が $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ において $w = 0$ としたときの特殊解である．
（参考）$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解として第 1 項を求め，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$，$w = 0$ の解として第 2 項を求める方法でも良い．

6. 次の命題は正しいか．正しくない場合は反例を示せ．(配点：10 点）
$\boldsymbol{R}^4$ のある基底を $\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_4$ とし，$\boldsymbol{R}^4$ のある部分空間を W とするとき，$\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_4$ のある部分集合が W の基底となる．
＜解答例＞
正しくない
$\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_4$ として次のベクトルを考える．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

これらのベクトルは 4 次元の全空間 $\boldsymbol{R}^4$ を張ることができるので基底である．次に部分空間 W としてベクトル $\boldsymbol{w} = [1, 1, 1, 1]$ で張られる空間を考える．W は 1 次元空間であり，基底は 1 個である．このとき，$\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_4$ から 1 個のベクトルを選んで W の基底とすることはできない．例えば，$\boldsymbol{v}_1$ を選んだ場合，部分空間 W にあるベクトルの第 2，3，4 要素を表現することができない．

（参考）空間 W にあるベクトルの全ての要素を $\boldsymbol{v}_1 \sim \boldsymbol{v}_4$ から選んだベクトルでは表現できないことを示す必要がある．

7. 次の行列に付随する４つの基本部分空間（行空間，零空間，列空間，左零空間）を求めよ（空間の次元と基底を求める）．さらに，行空間と零空間，及び列空間と左零空間が直交することを確かめよ．(基底が直交することを示す). (配点：5 点× 4 ＋ 5 点=25 点)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

＜解答例＞

◇行空間（配点：5 点）

行列 $\boldsymbol{A}$ をガウスの前進消去により $\boldsymbol{U}$ に変形する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

これより，行空間の基底は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

であり，次元は 2 次元である．

◇零空間（配点：5 点）

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求める．この方程式は上で求めた $\boldsymbol{U}$ を用いて次のように表される．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

これを解いて次の解を得る．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

これより，$\boldsymbol{A}$ の零空間の基底は

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

となり，次元は 2 次元である．

◇列空間（配点：5 点）

既に求めた $\boldsymbol{U}$ において，線形独立な列ベクトルは第 1 列と第 2 列である．従って，$\boldsymbol{A}$ の列ベクトルにおいても第 1 列と第 2 列が線形独立となる．これより，$\boldsymbol{A}$ の列空間の基底は

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

となり，次元は 2 次元である．

◇左零空間（配点：5 点）

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に対する一般解を求める．ガウスの前進消去により次式を得る．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

この方程式を解いて次の解を得る．

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

これより，$\boldsymbol{A}$ の零空間の基底は

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

となり，次元は 1 次元である．

◇空間の直交性（配点：5 点）
行空間と零空間の基底同士の内積が零となることを示す．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

列空間と左零空間の基底同士の内積が零となることを示す．

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

（参考）ここでは，内積をまとめて行列と行列（ベクトル）の積で表しているが，ベクトルの内積として個別に表現してもよい．