平成26年度後期　電気工学科5年生

情報ネットワーク工学
期末試験問題
（64点満点）

2015．1．29

（注意事項）
- 数値の解答は有効数字3桁以内で求めよ．

問題1（2点×6題＝12点）

次の行列に関して，以下の問に答えよ（数値で示すこと）．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

1. 固有値（$\lambda_1>\lambda_2$），固有ベクトル（$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$）を求めよ．固有ベクトルは正規化すること（$\|\boldsymbol{v}_1\|=1,\|\boldsymbol{v}_2\|=1$）．

2. 固有ベクトルを列ベクトルとする行列$\boldsymbol{V}$を求め，次の関係が成り立つことを示せ．
   (a) $\boldsymbol{V}^t\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}$,　(b) $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^t=\boldsymbol{I}$
   (c) $\boldsymbol{V}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Lambda}$,　$\boldsymbol{\Lambda}=diag\{\lambda_1,\lambda_2\}$

3. 次式が成り立つことを示せ．
   $$\lambda_i=\boldsymbol{v}_i^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i,\qquad i=1,2$$

4. 次のベクトル（正規化された任意のベクトル）を考える．
   $$\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\begin{bmatrix}1\\ a\end{bmatrix},\qquad \|\boldsymbol{v}\|=1$$
   次式を最大にする$\boldsymbol{v}$(すなわちa)を求めよ．
   $$y=\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$
   ここで求まった$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{v}_1$を比較せよ．

5. 次の関係が成り立つことを示せ．
   $$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t+\lambda_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t$$

6. $\lambda_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t$のほうが$\lambda_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t$よりも$\boldsymbol{A}$に近いことを示せ．
   $\|\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^t\|<\|\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^t\|$を示す．
   ここで，行列のノルムは要素の二乗平均とする．

問題2（5点×3題＝15点）

（1）下欄に示す$h(n)$，$g(n)$のフーリエ変換$H(e^{j\omega})$，$G(e^{j\omega})$を求めよ（$j\omega$の式）．さらに，振幅特性と位相特性を求めよ（ωの式）．
（2）振幅特性$|H(e^{j\omega})|$，$|G(e^{j\omega})|$の概略を$\omega T=0\sim\pi$の範囲で図示せよ．
（3）$g(n)=(-1)^n h(n)$であることに着目して2つの振幅特性の関係を求めよ（式と文章で表現）．

$$h(-1)=0.5,\qquad h(0)=1,\qquad h(1)=0.5$$
$$g(-1)=-0.5,\qquad g(0)=1,\qquad g(1)=-0.5$$
$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-1}^{1}h(n)e^{-j\omega nT}$$

問題3（4点×3題＝12点）

$G(z)$と$H(z)$が次の関係にあるとき，これらの周波数特性$G(e^{j\omega})$，$H(e^{j\omega})$にはどのような関係があるか，理由を付して述べよ．

(a)　$G(z)=H(-z)$　2点×2
(b)　$G(z)=H(z^{-1})$　4点
(c)　$G(z)=z^{-1}H(z)$　2点×2

（解答例）
＜周波数特性の関係＞
$(a),(b),(c)\cdots$「$G(e^{j\omega})$は$H(e^{j\omega})$を○○したものである」
＜インパルス応答の関係＞
$(a),(c)\cdots$「$G(e^{j\omega})$のインパルス応答$g(n)$は$H(e^{j\omega})$のインパルス応答$h(n)$を○○したものである」

問題4（5点×2題＝10点）

画像の圧縮符号化において，DCTやDWTが用いられるが，これらに関して以下の問いに答えよ．

（1）DCTとDWTの違いを述べよ．

（2）孤立波形を表すのにどちらが適しているか定性的に述べよ．

問題5（５点×３題＝１５点）

ウェーブレット変換（WT）は，入力信号の周波数特性を LPF：$H_0^{(0)}(e^{j\omega})$とHPF：$H_1^{(0)}(e^{j\omega})$により低域と高域に分け，その後1/2にダウンサンプルする．低域側ではさらに LPF：$H_0^{(1)}(e^{j\omega})$とHPF：$H_1^{(1)}(e^{j\omega})$で分け，その後1/2にダウンサンプルする．これを繰り返す．これに関して以下の問いに答えよ．

（1）$H_0^{(0)}(e^{j\omega})$と$H_1^{(0)}(e^{j\omega})$及び$H_0^{(1)}(e^{j\omega})$と$H_1^{(1)}(e^{j\omega})$の振幅特性を図示せよ．但し，ダウンサンプル前の標本化周波数をf_sとしたとき，前2者は$f=0\sim f_s/2$，後2者は$f=0\sim f_s/4$の範囲で図示せよ．

（2）$H_0^{(0)}(e^{j\omega})$と$H_1^{(0)}(e^{j\omega})$及び$H_0^{(1)}(e^{j\omega})$と$H_1^{(1)}(e^{j\omega})$のインパルス応答$h_i^{(k)}(n)$の概略図（包絡線）を示せ．但し，時間軸上の広がりが比較できるように図示せよ．インパルス応答を計算する必要はなく，$H_i^{(k)}(e^{j\omega})$の帯域幅を参考にして，広がりが比較できる概略図を描く．

（3）次頁に示す周波数特性を有する信号$x(n)$をWTに入力した．次の信号の周波数特性を（ ）内の範囲で図示せよ．A，B，Cと矢印も記入すること（DS：ダウンサンプル）

(a)$H_0^{(0)}(e^{j\omega})$の出力信号を1/2にDS→ $y_0^{(1)}(0\le f\le f_s/2)$

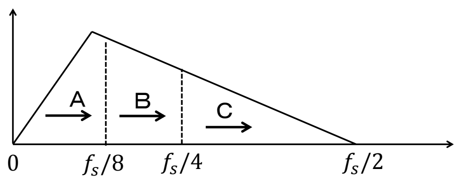
(b)$H_1^{(0)}(e^{j\omega})$の出力信号を1/2にDS→ $y_1^{(1)}(0\le f\le f_s/2)$

(c)$H_0^{(1)}(e^{j\omega})$の出力信号を1/2にDS→ $y_0^{(2)}(0\le f\le f_s/4)$

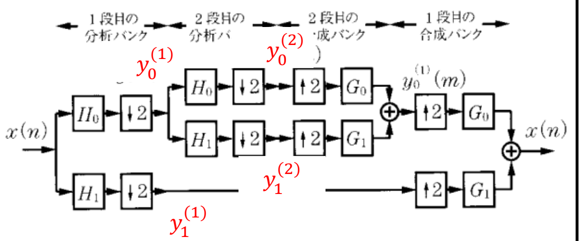
(d)$H_1^{(1)}(e^{j\omega})$の出力信号を1/2にDS→ $y_1^{(2)}(0\le f\le f_s/4)$

（3）においては，LPFとHPFの遷移帯域は急峻であるとする．

問題6（3）におけるWTに対する入力信号$x(n)$の周波数特性



（参考）フィルタバンクの構成



（a） 2レベル分解

$H_0^{(0)}$ $H_0^{(1)}$

$H_1^{(0)}$ $H_1^{(1)}$