「情報ネットワーク工学」練習問題（１）

2012.6.6

問題Ⅰ　標本化定理

輝度分布が次式で与えられる画像の標本間隔T_x，T_yに対する条件を求めよ．

$$f(X,Y) = 0.5 + 0.5cos(2\pi \times 0.5 \times X) \cdot cos(2\pi \times 0.5 \times Y)$$

（参考）X方向の周期が$1/0.5 = 2$，Y方向の周期が$1/0.5 = 2$である．標本間隔は周期/2 より狭くする必要がある．画像が多くの周期成分を含む場合は，標本間隔を（最も小さい周期）/2 より狭くする．

（さらに）次式で表される画像における標本間隔T_x，T_yが満たす条件を求めよ．

$$f(X,Y) = 0.5 + 0.5cos(2\pi \times 0.5 \times X) \cdot cos(2\pi \times 0.25 \times Y)$$
$$f(X,Y) = 0.5 + 0.5[\cos(2\pi \times 0.25 \times X) + co\,s(2\pi \times 0.5 \times X)] \cdot cos(2\pi \times 1 \times Y)$$

問題Ⅱ　量子化誤差

$-\Delta/2 \sim \Delta/2$に一様分布する量子化誤差eを考える．

（１）　eの二乗平均（＝分散：σ_e^2）を求めよ．

（２）　小数点以下のビット数をbとしたとき，Δ をbで表せ．

（３）　信号を次のように表す．

$$x(n) = acos(2\pi\omega nT)$$

信号電力σ_x^2に対する雑音電力σ_e^2の比をa，bで表せ．

（４）（３）において，$a = 2$，$b = 8$としたときの SNR [dB]を求めよ．

問題Ⅲ　共分散

（１）画像の輝度分布が次のように与えられているとき，自己共分散$C_{ff}(u), u = 0, 1, 2$を求めよ．

$$f(x) = [1, 2, 0, 4, 3, 1, 2, 1, 4, 2]$$

（参考）

$$C_{ff}(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{10}\left(f(x) - \mu_f\right)\left(f(x+u) - \mu_f\right), \qquad N = 10$$

但し，$f(11) = 1, f(12) = 2$，$f(3) = 0$とする．

（２）別のブロック画像の輝度分布が次式で与えられるとき，相互共分散$C_{fg}(u), u = 0, 1, 2$を求めよ．

$$g(x) = [2, 2, 1, 3, 4, 0, 1, 2, 4, 1]$$

（参考）

$$C_{fg}(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{10}\left(f(x) - \mu_f\right)\left(g(x) - \mu_g\right), \qquad N = 10$$

問題Ⅳ　KLT の基礎（固有値，固有ベクトルによる行列の分解）

次の行列に関して以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

（1）固有値と固有ベクトルを求めよ．但し，固有ベクトルの長さ（ノルム）は 1 とする．

（2）固有ベクトルが互いに直交することを確かめよ．

（3）$\boldsymbol{A}$を固有値と固有ベクトルを用いて表せ．

（4）$\lambda_1 > \lambda_2$としたとき，$\boldsymbol{A}$をλ_1とその固有ベクトルを用いて表せ．

(参考)

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^t + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{x}_2^t$$

問題Ⅴ　情報源符号化

（1）「無記憶情報源」と「記憶のある情報源」の違いを述べよ．

（2）情報源の記号（シンボル）を$\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$とし，その生起確率を$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$とする．$\{s_i\}$に対する符号語を$\{w_i\}$として，その符号長を$\{l_i\}$とする．平均符号長Lを求めよ．

（3）（2）において，平均符号長Lを小さくするためには，$\{p_i\}$に対して$\{l_i\}$をどのように決めればよいか述べよ．

問題Ⅵ　符号の条件

（1）「一意復号性」と「瞬時復号性」について説明せよ．

（2）「一意かつ瞬時に復号できるための条件は，全ての符号語が符号木の終端点に割り当てられていることである」．次の符号語に対する符号木を求めて一意かつ瞬時に復号できるか否か判定せよ．

	符号Ⅰ	符号Ⅱ	符号Ⅲ	符号Ⅳ
s_1	00	0	1	1
s_2	01	01	10	01
s_3	10	010	101	001
s_4	11	011	1001	0001

（3）「一意かつ瞬時復号可能な２進符号が構成できるための必要十分条件は，その符号長が

$$\sum_{i=1}^{N} 2^{-l_i} \leq 1$$

を満たすことである」．（2）で与えた符号Ⅰ，Ⅱはこの条件を満たすか調べよ．

問題Ⅶ　ハフマン符号

（1）次の情報源に対するハフマン符号を求めよ．

記号（シンボル）	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
生起確率	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

（2）（1）で求めたハフマン符号に対する平均符号長を求めよ．

（3）（1）で求めたハフマン符号に対する符号木を求め，符号が全て終端点に位置することを確認

せよ．

問題Ⅷ　算術符号

情報源が次のように与えられている．

記号（シンボル）	a	b
生起確率	3/4	1/4

（１）記号（シンボル）列：abbに対する算術符号を求めよ．符号値として求める．
（２）（１）で求めた符号値から記号列abbを復号する過程を示せ．
（３）（１）で求めた符号値を表現するために必要な小数点以下の語長（ビット数）を求めよ．

（参考）abbの区間幅は次に示すように，3/64 である．

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$$

この区間の値を表現するためには，

$$\log_2\frac{64}{3}=6-\log_2 3=6-1.58=4.42 \text{ ビット}$$

必要である．記号当たりの平均符号長は

$$L=\frac{4.42}{3}=1.47 \quad [\text{bit/記号}]$$

一方，エントロピーは次のようになる．

$$H=-p_1\,log_2\,p_1-p_2\,log_2\,p_2=-\frac{3}{4}log_2\frac{3}{4}-\frac{1}{4}log_2\frac{1}{4}=\frac{3.26}{4} \quad [\text{bit/記号}]$$

この例では，$H<L$であるが，記号列の長さを長くすることによりLがHに近づく．