

第6章 具体的符号化法

6.1 シヤノン・ファノ符号

次の条件を満たす無記憶情報源の2元符号(シヤノン・ファノ符号)を構成する.

$$-\log P(s_k) \leq l_k < -\log P(s_k) + 1$$

シャノン・ファノ符号の具体例

$$S = \left\{ \begin{matrix} s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ 0.4, & 0.3, & 0.2, & 0.1 \end{matrix} \right\}$$

(ステップ1) 発生確率の大きい順位並べる.

(ステップ2) 次の条件を満たす正の整数(自然数)を符号長(l_1, l_2, l_3, l_4)とする.

$$-\log 0.4 \leq l_1 < -\log 0.4 + 1 \rightarrow l_1 = 2$$

$$-\log 0.3 \leq l_2 < -\log 0.3 + 1 \rightarrow l_2 = 2$$

$$-\log 0.2 \leq l_3 < -\log 0.2 + 1 \rightarrow l_3 = 3$$

$$-\log 0.1 \leq l_4 < -\log 0.1 + 1 \rightarrow l_4 = 4$$

(ステップ3) 次の確率を求める.

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = P_1 + P(s_1) = 0.4$$

$$P_3 = P_2 + P(s_2) = 0.7$$

$$P_4 = P_3 + P(s_3) = 0.9$$

(ステップ4) $P_k, k = 1 \sim 4$ を2進数に展開する.

$$P_1 = 0 \rightarrow 0.00000 \dots$$

$$P_2 = 0.4 \rightarrow 0.01100 \dots$$

$$P_3 = 0.7 \rightarrow 0.10110 \dots$$

$$P_4 = 0.9 \rightarrow 0.11100 \dots$$

(ステップ5) 小数点以下 l_k ($k = 1 \sim 4$) 桁を s_k の符号とする.

$$s_1 \rightarrow 00 \quad l_1 = 2$$

$$s_2 \rightarrow 01 \quad l_2 = 2$$

$$s_3 \rightarrow 101 \quad l_3 = 3$$

$$s_4 \rightarrow 1110 \quad l_4 = 4$$

平均符号長

$$L = 2 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2.4$$

[bit/記号]

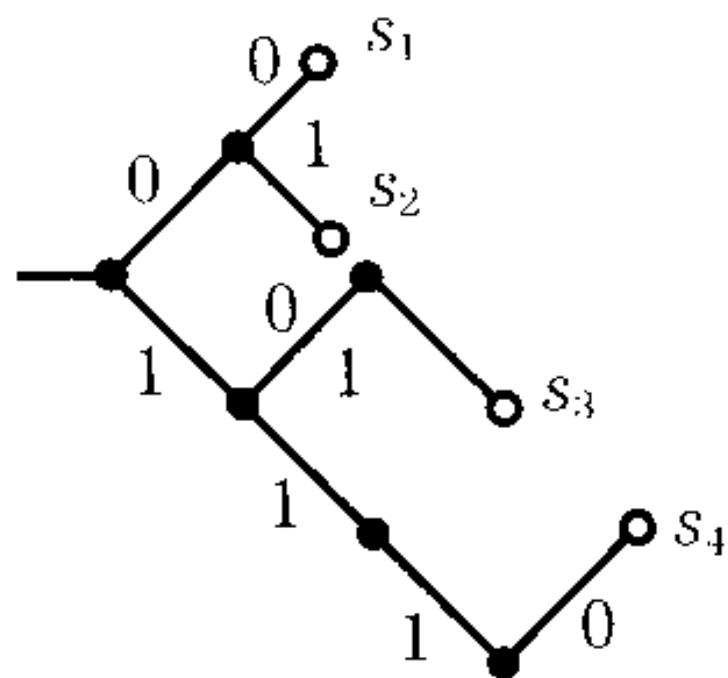


図 6.1 シャノン・ファノ符号の符号木 ($L=2.4$)

6.2 ハフマン符号

$$S = \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3, s_4 \\ 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 \end{array} \right\}$$

(ステップ1) 発生確率の大きい順に並べる.

(ステップ2) 発生確率の小さい2つの記号(s_3, s_4)を選び、
対応する符号として末尾に0,1を割り当てる.

(ステップ3) 2つの記号(s_3, s_4)を一つの記号 s_3^* で表し、
発生確率を $P(s_3^*)$ とする.

$$P(s_3^*) = P(s_3) + P(s_4) = 0.3$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{c} s_1, s_2, s_3^* \\ 0.4 \quad 0.3 \quad 0.3 \end{array} \right\}$$

(ステップ4) ステップ1に戻る.

(ステップ5) ステップ1, 2, 3のループを記号が1個になるまで繰り返す.

<ループ1回目> $\rightarrow S_1$

<ループ2回目>

$$S_2 = \left\{ \begin{matrix} s_1, s_2^* \\ 0.4, 0.6 \end{matrix} \right\} \rightarrow S'_2 = \left\{ \begin{matrix} s_2^*, s_1 \\ 0.6, 0.4 \end{matrix} \right\}$$

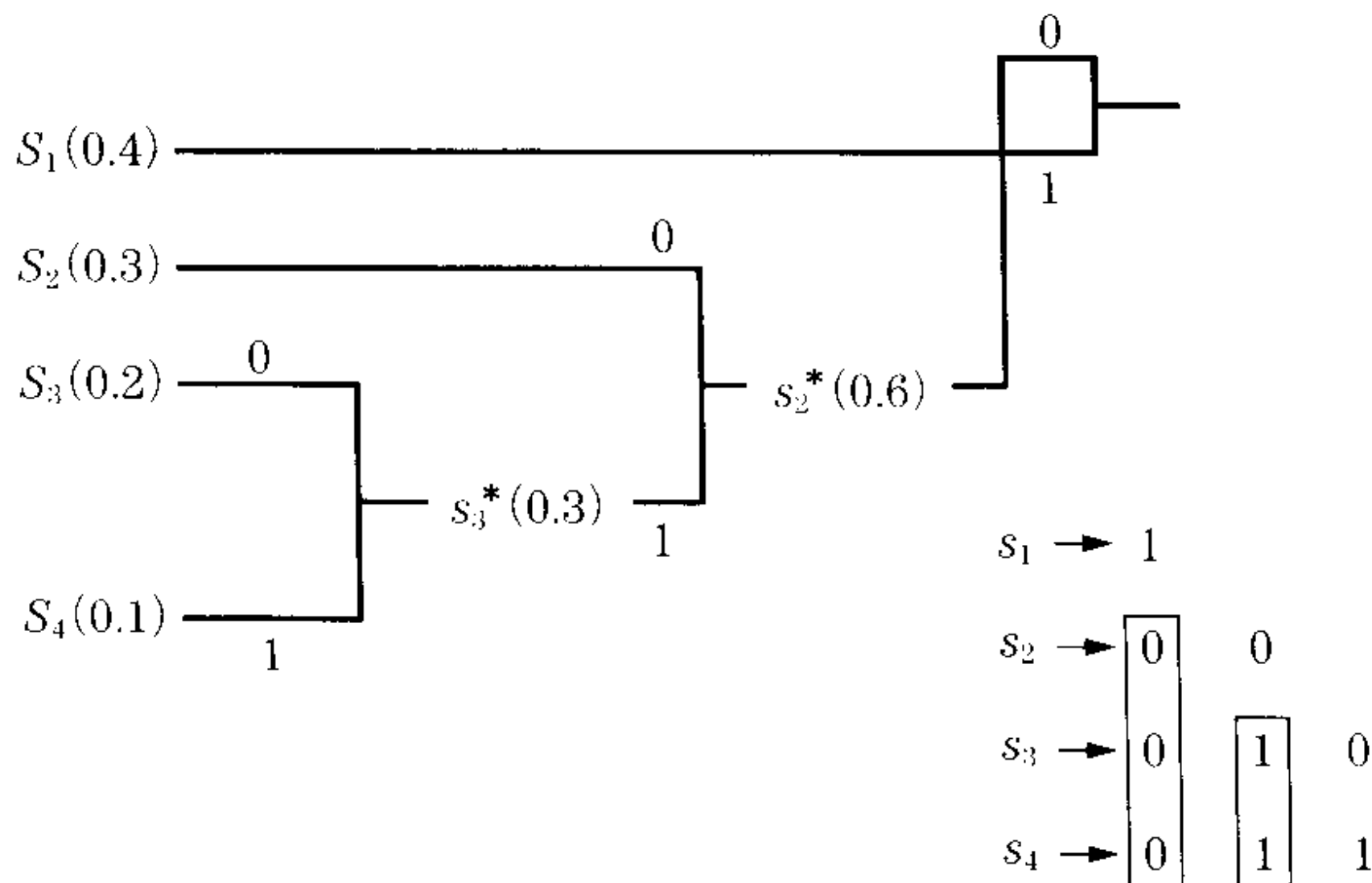


図 6.2 ハフマン符号化

この符号の平均符号長は,

$$L = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1.9$$

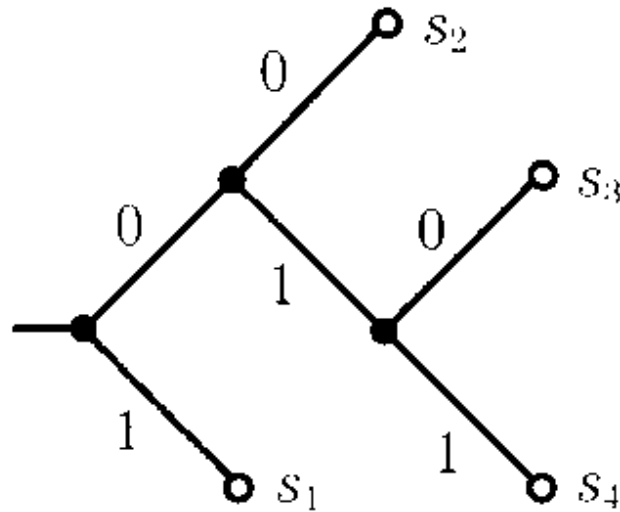


図 6.3 ハフマン符号の符号木 ($L=1.9$, コンパクト符号)

複数の符号が可能

(1) 0,1を割り振る→1,0を割り振る

(2) 発生確率が同じ→どちらを先にしても良い

演習問題

次の無記憶情報源 S について

$$S = \left\{ \begin{matrix} s_1, & s_2, & s_3 \\ 0.6, & 0.3, & 0.1 \end{matrix} \right\}$$

- (1) シャノン・ファノ符号を求めよ.
平均符号長と符号木を求めよ.
- (2) ハフマン符号を求めよ.
平均符号長と符号木を求めよ.

第7章 通信路と相互情報量

7.1 通信路モデル

情報源から情報を送るための通信路(channel)が必要であり, その確率モデルを構築する.

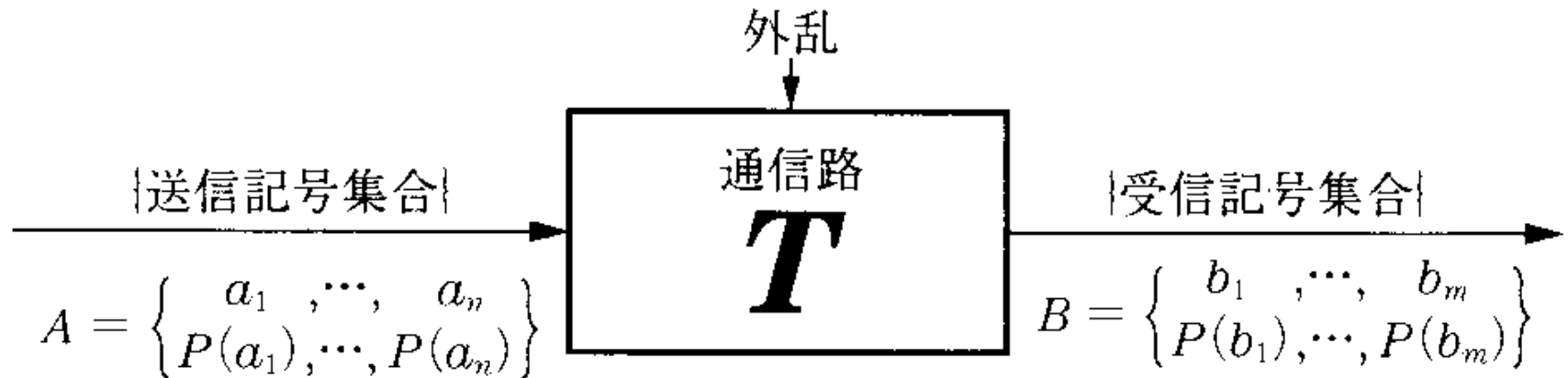


図 7.1 通信路モデル

通信路モデル(通信路行列)

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & b_1 & \cdots & b_\ell & \cdots & b_m \\ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} t_{11} & \cdots & \uparrow & \cdots & t_{1m} \\ \vdots & \ddots & \uparrow & \cdot & \cdot \\ \rightarrow & \rightarrow & t_{k\ell} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{nm} \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$t_{k\ell} = P(b_\ell | a_k) = P(a_k \rightarrow b_\ell)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t_{k\ell} \leq 1 \quad (k=1, \cdots, n, \ell=1, \cdots, m) \\ \sum_{\ell=1}^m t_{k\ell} = 1 \quad (k=1, \cdots, n) \end{aligned} \right\}$$

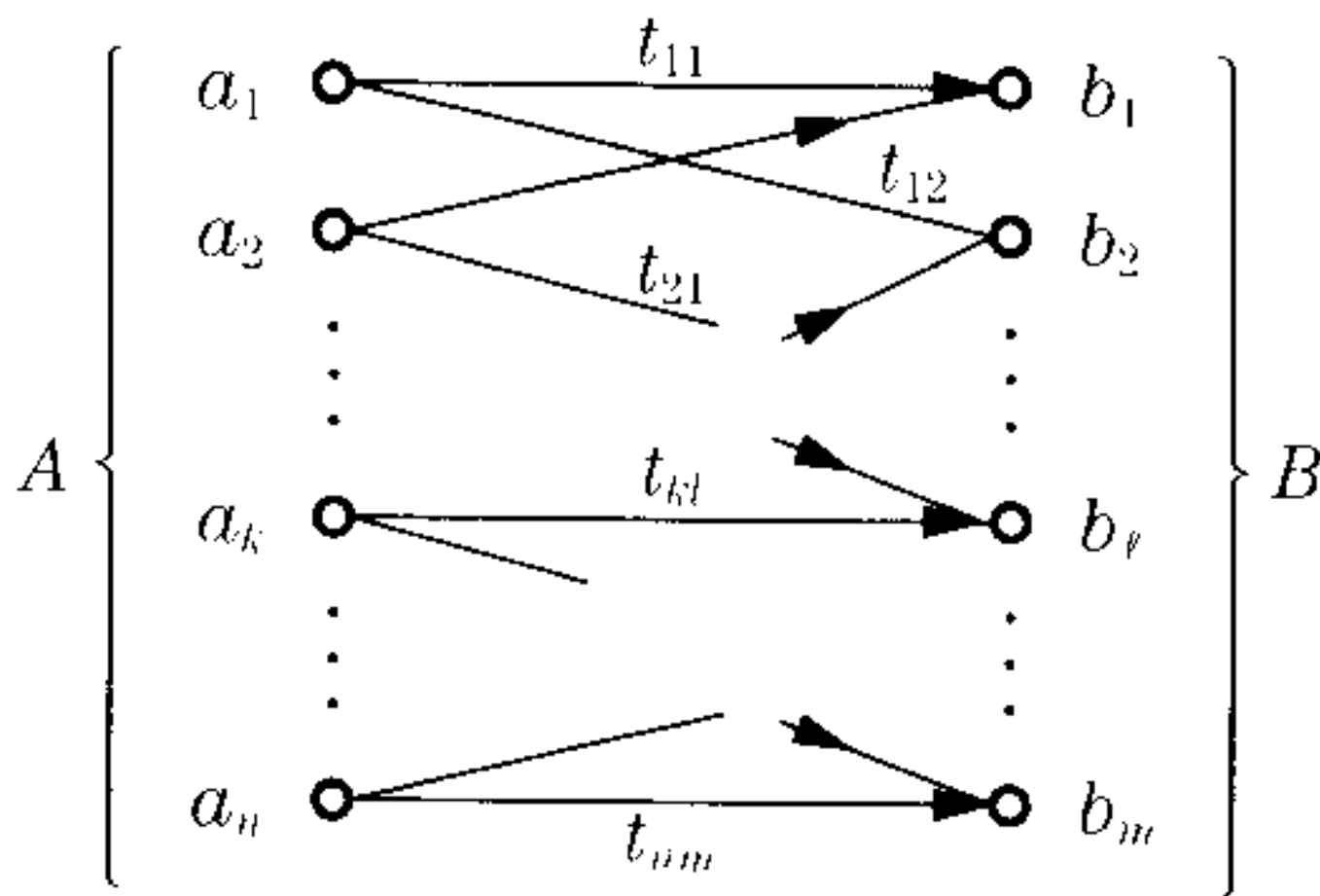


図 7.2 通信路線図

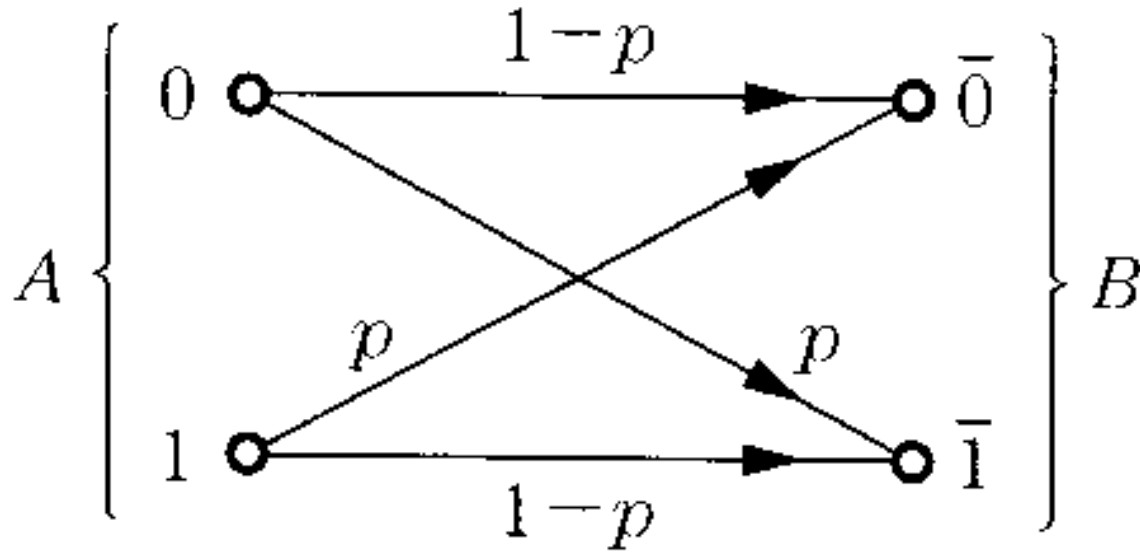


図 7.3 2 元対称通信路 (BSC)

$0 \rightarrow \bar{0}$, $1 \rightarrow \bar{1}$ が正しい通信なので, $0 \rightarrow \bar{1}$, $1 \rightarrow \bar{0}$ は誤った通信であり, p は通信における誤り確率である.

7.2 通信路での確率関係

$$\left\{ \begin{array}{l} P(a_k) \quad (k=1, \dots, n) \\ P(b_\ell | a_k) \quad (k=1, \dots, n, \ell=1, \dots, m) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(b_\ell) \quad (\ell=1, \dots, m) \\ P(a_k | b_\ell) \quad (k=1, \dots, n, \ell=1, \dots, m) \end{array} \right\}$$

$P(a_k)$: 送信記号 a_k の生起確率

$P(b_l | a_k)$: a_k を送信したとき, b_l が受信される確率
(条件付き確率)

$P(b_l)$: 受信記号 b_l の生起確率

$P(a_k | b_l)$: b_l を受信したとき, 送信記号が a_k である確率
(事後確率)

【性質 7.1】

(1) 全確率の公式

$$P(b_\ell) = \sum_{i=1}^n P(b_\ell | a_i) P(a_i)$$

(2) ベーズの定理

$$P(a_k | b_\ell) = \frac{P(b_\ell | a_k) P(a_k)}{\sum_{i=1}^n P(b_\ell | a_i) P(a_i)}$$

(1) 結合確率の周辺分布をとると,

$$P(b_\ell) = \sum_{i=1}^n P(a_i, b_\ell) \quad (7.11)$$

ここで, 結合確率と条件付き確率の関係

$$P(a_i, b_\ell) = P(b_\ell | a_i) P(a_i) \quad (7.12)$$

を式 (7.11) へ代入すると, 式 (7.9) が求まる.

(2) 結合確率を, 条件付き確率を用いて2通りに表す.

$$P(a_k, b_\ell) = P(a_k | b_\ell) P(b_\ell) = P(b_\ell | a_k) P(a_k) \quad (7.13)$$

式 (7.13) の2項目と3項目を $P(b_\ell) (>0)$ で割ると,

$$P(a_k | b_\ell) = \frac{P(b_\ell | a_k) P(a_k)}{P(b_\ell)} \quad (7.14)$$

式 (7.14) の分母に式 (7.9) を代入すると, 式 (7.10) が求まる.

7.3 通信路での平均情報量(エントロピー)の関係

$$H(A) = - \sum_{k=1}^n P(a_k) \log P(a_k)$$

$$H(B) = - \sum_{\ell=1}^m P(b_{\ell}) \log P(b_{\ell})$$

$$H(A|B) = - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_{\ell}) \log P(a_k | b_{\ell})$$

$$H(B|A) = - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_{\ell}) \log P(b_{\ell} | a_k)$$

$$H(A, B) = - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_{\ell}) \log P(a_k, b_{\ell})$$

7.4 相互情報量—通信路により伝送される情報量

相互情報量

送信記号集合Aに対する観測前後のエントロピーの変化

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) \quad [\text{bit/記号}]$$



図 7.5 通信路でのエントロピーの変化

$$I(A;B) = \{A \text{ の持つ情報量}\}$$

– $\{B$ を受信することで A の情報の一部がすでに分かっているとき, その後 A の持つ残りの情報量 $\}$

$$= \{B \text{ の観測で得られた情報量}\}$$

$$= \{\text{通信路で伝送された情報量}\} \quad (7.25)$$

$$I(A;B) = \{A \text{ の持つ不確定性}\}$$

– $\{B$ を受信することにより A の一部を知った後, まだ残っている A の持つ不確定性 $\}$

$$= \{\text{観測による不確定性の減少量}\}$$

$$= \{B \text{ の観測で得られた情報量}\}$$

$$= \{\text{通信路で伝送された情報量}\} \quad (7.26)$$

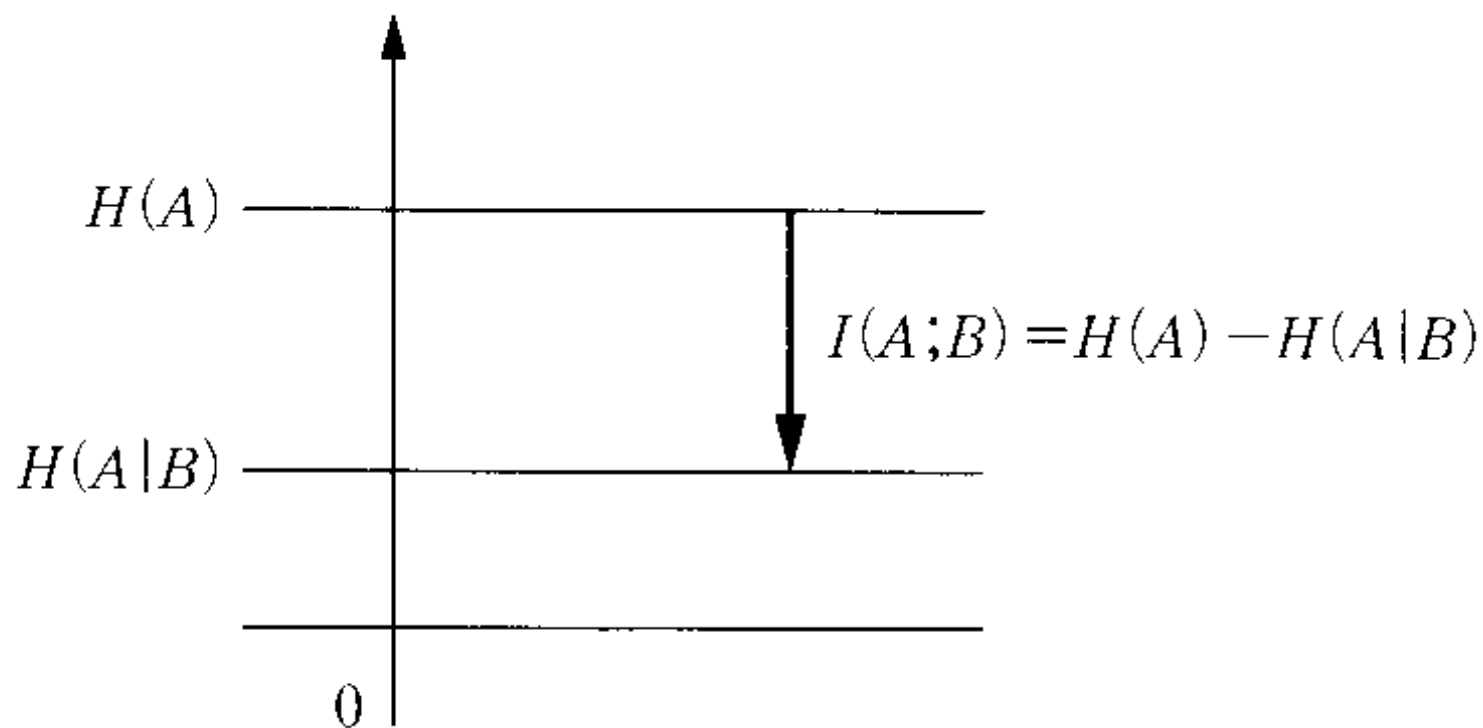


図 7.6 エントロピーの変化量 (減少量)

7.5 相互情報量の確率表現

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B)$$

$$= - \sum_{k=1}^n P(a_k) \log P(a_k) - \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell) \log P(a_k | b_\ell) \right\}$$

$$= - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell) \log P(a_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell) \log P(a_k | b_\ell)$$

$$(\because P(a_k) = \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell))$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell) \log \frac{P(a_k | b_\ell)}{P(a_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m P(a_k, b_\ell) \log \frac{P(a_k, b_\ell)}{P(a_k) P(b_\ell)} \quad (7.29)$$

相互情報量の例題

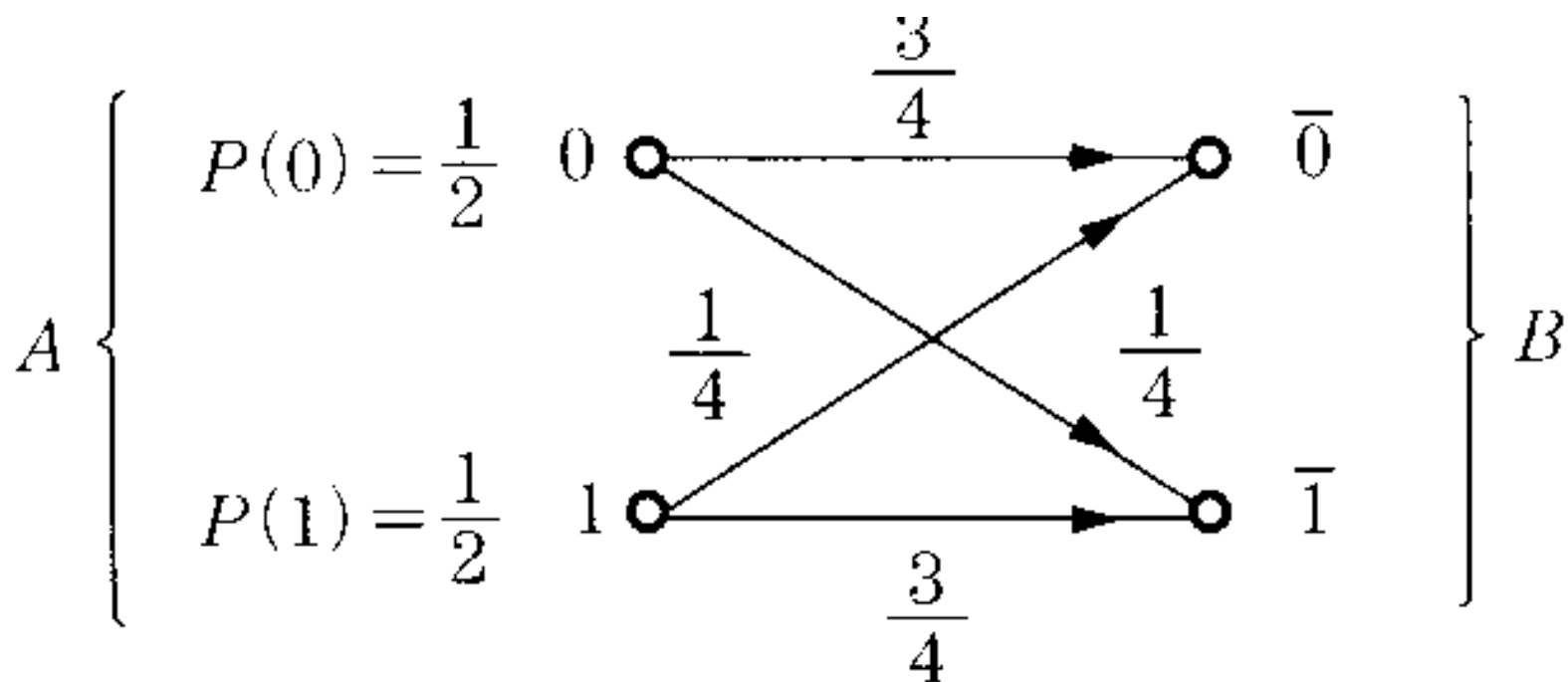


図 7.7 2次元対称通信路 (誤り確率 $p = \frac{1}{4}$)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} P(\bar{0} | 0) & P(\bar{1} | 0) \\ P(\bar{0} | 1) & P(\bar{1} | 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & 1 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} P(\bar{0}) \\ P(\bar{1}) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore P(\bar{0}) = P(\bar{1}) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned}
 P(0, \bar{0}) &= P(\bar{0} | 0) P(0) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
 P(0, \bar{1}) &= P(\bar{1} | 0) P(0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
 P(1, \bar{0}) &= P(\bar{0} | 1) P(1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
 P(1, \bar{1}) &= P(\bar{1} | 1) P(1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}
 \end{aligned} \right\}$$

$$I(A; B) = \sum_A \sum_B \boxed{P(a, b) \log \frac{P(a, b)}{P(a)P(b)}}$$

$$= P(0, \bar{0}) \log \frac{P(0, \bar{0})}{P(0)P(\bar{0})} + P(0, \bar{1}) \log \frac{P(0, \bar{1})}{P(0)P(\bar{1})} \\ + P(1, \bar{0}) \log \frac{P(1, \bar{0})}{P(1)P(\bar{0})} + P(1, \bar{1}) \log \frac{P(1, \bar{1})}{P(1)P(\bar{1})}$$

$$= \frac{3}{8} \log \frac{3}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \log \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4} \log 3 - 1 \approx 0.189 \text{ [bit/記号]} \quad (7.)$$

7.6 相互情報量の性質

【性質 7.2】

相互情報量は、常に非負の値を持つ.

$$I(A; B) \geq 0$$

【性質 7.3】

相互情報量は、次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\ &= H(B) - H(B|A) \\ &= H(A) + H(B) - H(A, B) \\ &= H(A, B) - H(A|B) - H(B|A) \end{aligned}$$

7.7 種々の通信路

7.7.1 雑音のない通信路

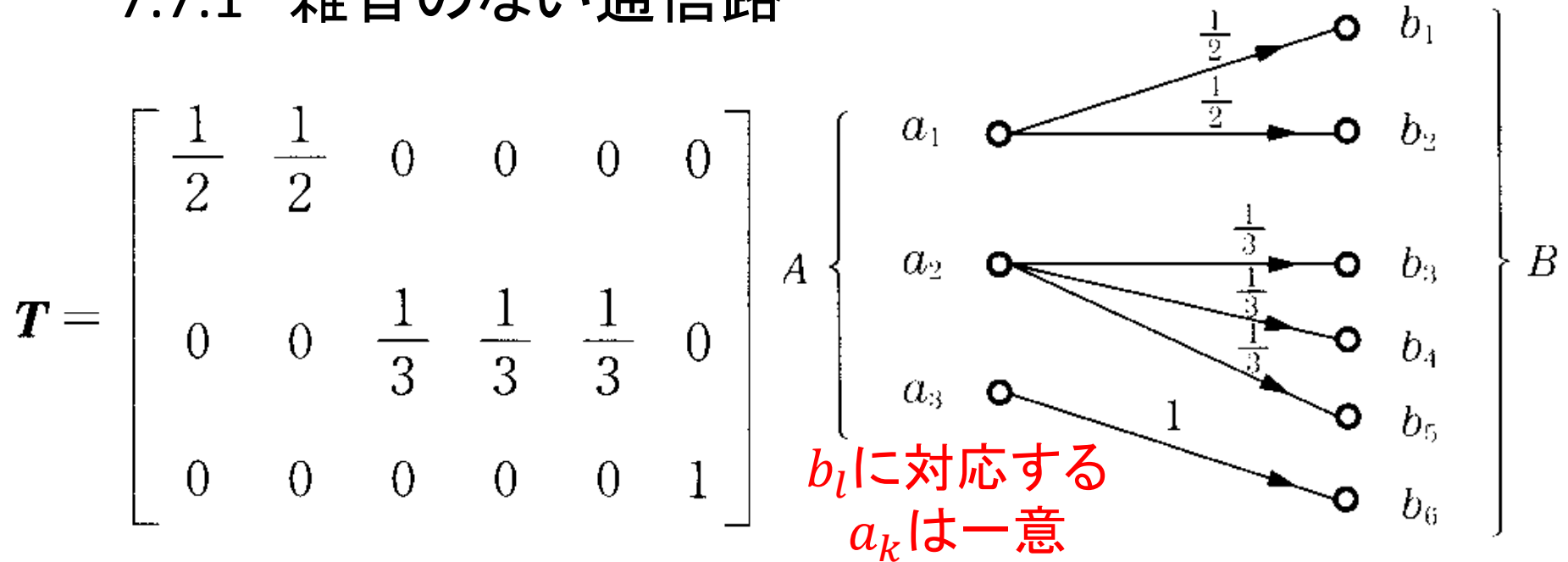


図 7.8 雑音のない通信路

$$\forall k, \ell \quad P(a_k | b_\ell) = 0 \text{ または } 1$$

事後確率

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(A) - H(A|B) \\ &= H(A) \end{aligned}$$

相互情報量

7.7.2 確定的通信路

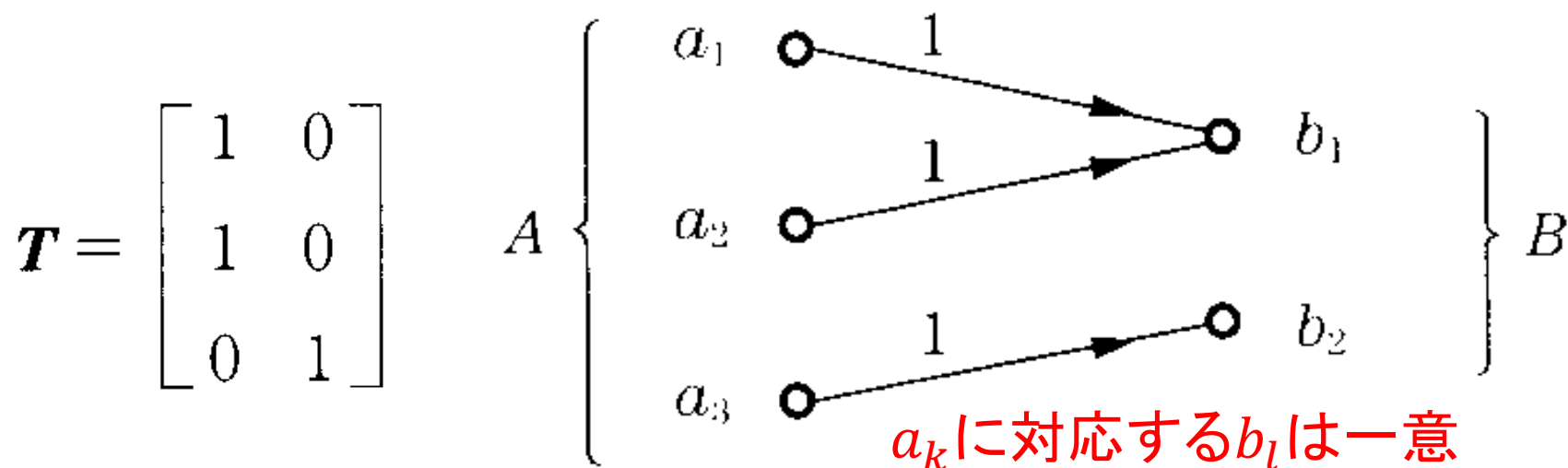


図 7.9 確定的通信路

$$\forall k, \ell \quad P(b_\ell | a_k) = 0 \text{ または } 1$$

事前確率

$$\begin{aligned} I(A; B) &= H(B) - H(B|A) \\ &= H(B) \end{aligned}$$

相互情報量

7.8 通信容量

$$C = \max_{\left\{ \begin{array}{l} P(a_k) (k=1, \dots, n) \\ \sum_{k=1}^n P(a_k) = 1 \end{array} \right\}} I(A; B) \quad [\text{bit}/\text{送信記号}]$$

入力記号の生起確率を変化させて相互情報量の最大値を求める.

相互情報量＝入力記号の生起確率と通信路行列の条件付き確率の関数

制約条件 $\sum_{k=1}^n P(a_k) = 1$ のもとで, 入力記号集合 A を $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ と変化させて $I(A; B)$ の最大値を探す.

通信路に最も適した入力記号集合 A^* を用いたときの相互情報量を **通信容量** という.

通信容量の例題

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ x & 1-x \end{array} \right\}$$

$$C = \max_x I(A; B)$$

$$= \max_x H(A)$$

$$= \max_x \{ -x \log x - (1-x) \log (1-x) \}$$

$$= \max_x H(x) = 1 \quad \left(x = \frac{1}{2} \right)$$

演習問題

7.1 次のような送信記号集合 A と通信路行列 $\mathbf{T}$ で表される通信路について、以下の問いに答えなさい。

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2 \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

- (1) 送信記号集合 A のエントロピー $H(A)$ を求めなさい。
- (2) 受信記号集合 B を $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ とすると、 m はいくつとなるか答えなさい。
- (3) 通信路線図を描きなさい。
- (4) 受信記号 $b_1, \dots, b_m$ の生起確率 $P(b_1), \dots, P(b_m)$ を求めなさい。
- (5) $P(a_k | b_\ell) (k, \ell = 1, 2)$ を求めなさい。

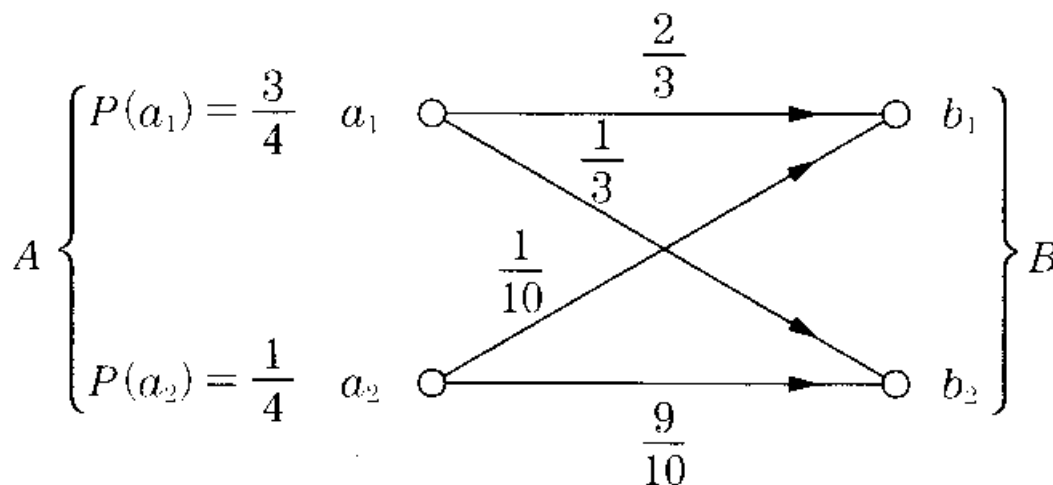
(1)

$$\begin{aligned} H(A) &= -\sum_A P(a) \log P(a) \\ &= -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = 2 - \frac{3}{4} \log 3 \approx 0.811 \quad [\text{bit/記号}] \end{aligned}$$

(2) $m=2$

通信路行列Tのサイズによって決まる

(3)



通信路行列Tに対応

全確率の公式に基づいて計算

(4)

$$\begin{aligned} P(b_1) &= P(b_1 | a_1)P(a_1) + P(b_1 | a_2)P(a_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{21}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(b_2) &= P(b_2 | a_1)P(a_1) + P(b_2 | a_2)P(a_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{40} \end{aligned}$$

(5)

ベイズの定理と全確率の公式に基づいて計算

$$P(a_1|b_1) = \frac{P(b_1|a_1)P(a_1)}{P(b_1)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{21}{40}} = \frac{20}{21}$$

$$P(a_1|b_2) = \frac{P(b_2|a_1)P(a_1)}{P(b_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{10}{19}$$

$$P(a_2|b_1) = \frac{P(b_1|a_2)P(a_2)}{P(b_1)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{21}{40}} = \frac{1}{21}$$

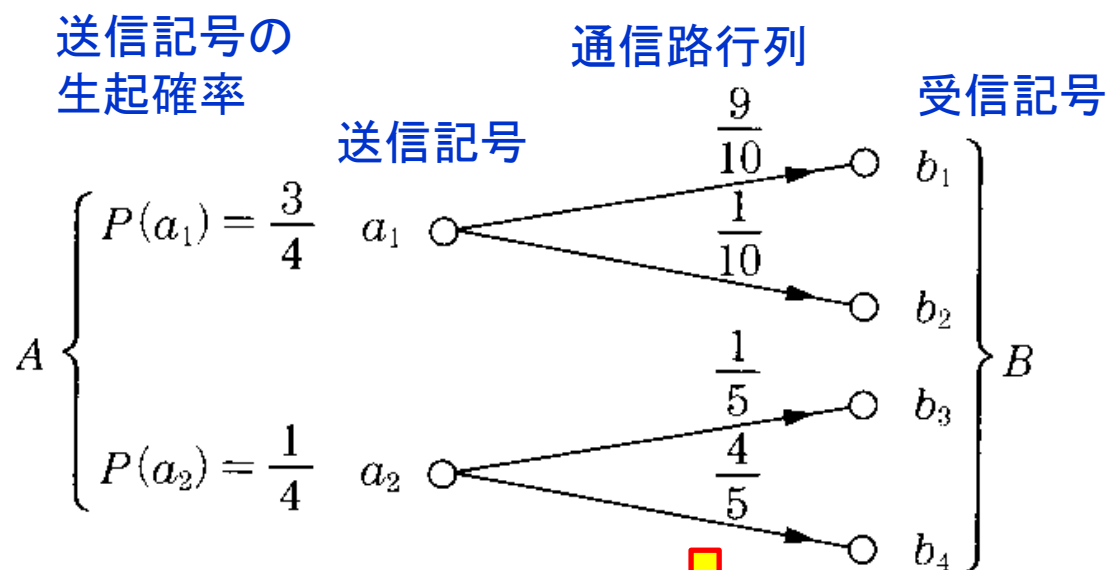
$$P(a_2|b_2) = \frac{P(b_2|a_2)P(a_2)}{P(b_2)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}$$

7.2 次のような送信記号集合 A と通信路行列 $\mathbf{T}$ で表される通信路について、以下の問いに答えなさい.

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2 \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

- (1) 通信路線図を描きなさい.
- (2) この通信路の名称を答えなさい.
- (3) 相互情報量 $I(A; B)$ を求めなさい.

(1)



(2)

雑音のない通信路

b_l に対応する a_k は一意

(3)

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B)$$

$$= H(A) \quad (\because \text{雑音のない通信路なので, } H(A|B) = 0)$$

エントロピー

$$= -\sum_A P(a) \log P(a) = -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4}$$

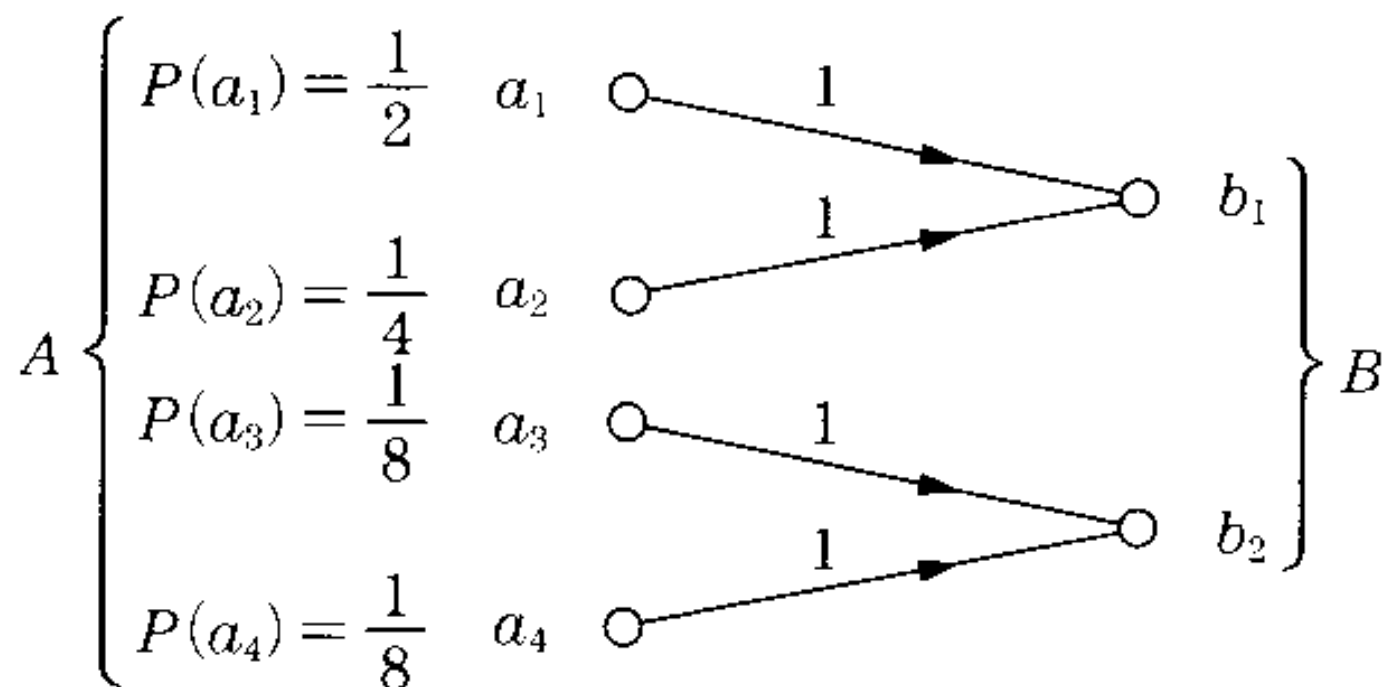
$$= 2 - \frac{3}{4} \log 3 \approx 0.811 \quad [\text{bit/記号}]$$

7.3 次のような送信記号集合 A と通信路行列 $\mathbf{T}$ で表される通信路について、以下の問いに答えなさい.

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, & \frac{1}{8} \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 通信路線図を描きなさい.
- (2) この通信路の名称を答えなさい.
- (3) 相互情報量 $I(A; B)$ を求めなさい.

(1)



(2) 確定的通信路 $\leftarrow a_k$ に対応する b_l は一意

(3)

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A)$$

$$= H(B) \quad (\because \text{確定的通信路なので, } H(B|A) = 0)$$

したがって, $P(b_1)$, $P(b_2)$ を求める.

全確率
の公式

$$P(b_1) = P(b_1|a_1)P(a_1) + P(b_1|a_2)P(a_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(b_2) = P(b_2|a_3)P(a_3) + P(b_2|a_4)P(a_4) = 1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

エントロピー

$$H(B) = -\sum_B P(b) \log P(b) = -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4}$$

$$= 2 - \frac{3}{4} \log 3 \approx 0.811$$

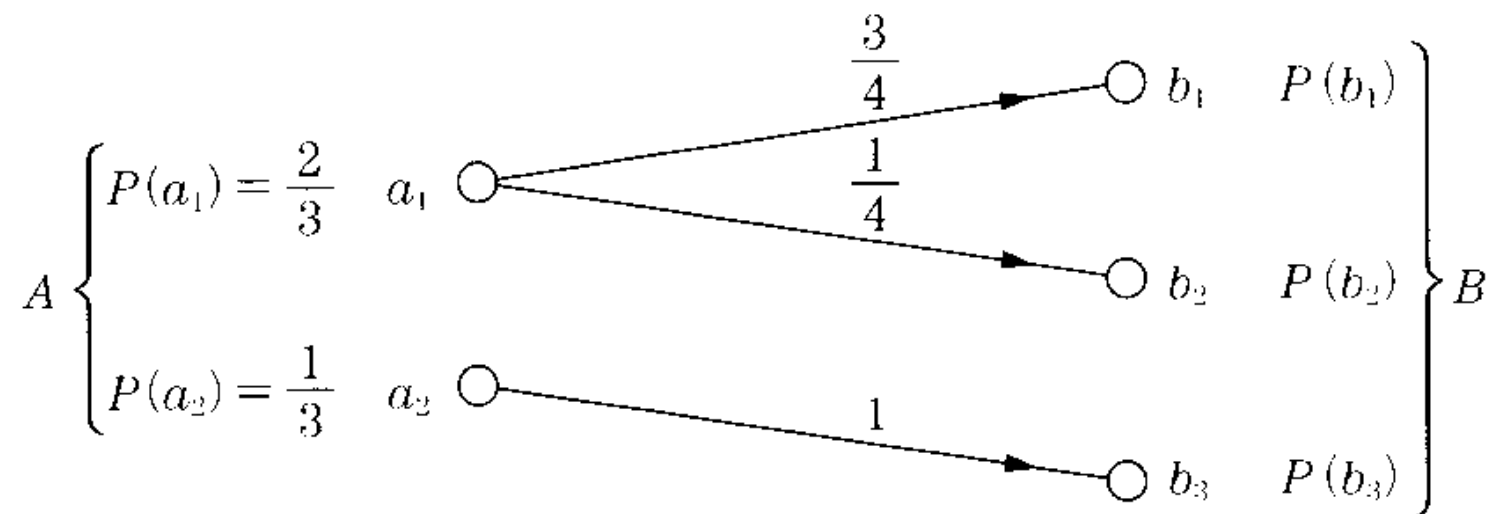
$$\therefore I(A; B) = H(B) \approx 0.811 \quad [\text{bit/記号}]$$

7.4 次のような送信記号集合 A , 受信記号集合 B , 通信路行列 $\mathbf{T}$ で表される通信路について, 以下の問いに答えなさい.

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2 \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{matrix} b_1, & b_2, & b_3 \\ P(b_1), P(b_2), P(b_3) \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 通信路線図を描きなさい.
- (2) 送信記号集合 A のエントロピー $H(A)$ を求めなさい.
- (3) 受信記号集合 B のエントロピー $H(B)$ を求めなさい.
- (4) 相互情報量 $I(A; B)$ を求めなさい.
- (5) 通信路容量 C を求めなさい.

(1)



(2)

$$H(A) = - \sum_A P(a) \log P(a)$$

$$= - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} = \log 3 - \frac{2}{3}$$

$$\approx 0.918 \quad [\text{bit/記号}]$$

(3) まず、受信記号の生起確率を求める。


$$\begin{bmatrix} P(b_1) \\ P(b_2) \\ P(b_3) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore P(b_1) = \frac{1}{2}, \quad P(b_2) = \frac{1}{6}, \quad P(b_3) = \frac{1}{3}$$

エントロピー

$$\begin{aligned} H(B) &= -\sum_B P(b) \log P(b) \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \log \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \log \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} (3 + 2 \log 3 + \log 6) \approx 1.459 \quad [\text{bit/記号}] \end{aligned}$$

(4) 本通信路は、雑音のない通信路なので、 $H(A|B)=0$ より、

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B) = H(A) = \log 3 - \frac{2}{3} \\ \approx 0.918 \quad [\text{bit/記号}]$$

(5) 送信記号（入力記号）の発生確率を $P(a_1)=x$, $P(a_2)=1-x$ とする。すなわち、

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ x & 1-x \end{Bmatrix}$$

に対して、

$$\begin{aligned} C &= \max_x I(A;B) \\ &= \max_x H(A) \\ &= \max_x \{-x \log x - (1-x) \log (1-x)\} \\ &= \max_x H(x) = 1 \quad \left[x = \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

相互情報量を最大にする送信記号の生起確率 x を求める。この確率における相互情報量（最大値）が通信容量

したがって、

$$C = 1 \quad [\text{ビット/記号}]$$

7.5 送信記号集合 $A = \{a_1, a_2\}$, 受信記号集合 $B = \{b_1, b_2\}$, 通信路行列 $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

である通信路について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) この通信路の名称を答えなさい.
- (2) 確率 p は何と呼ばれるかを示しなさい.
- (3) $P(a_1) = x$, $P(a_2) = 1-x$ の場合, $P(b_1)$, $P(b_2)$ を求めなさい.
- (4) $H(B)$ を求めなさい.
- (5) $H(B|A)$ を求めなさい.
- (6) 通信路容量 C の定義を示しなさい.
- (7) 具体的に通信路容量 C を, $H(B)$ と $H(B|A)$ を用いて, p の関数として求めなさい.
- (8) $C = C(p)$ を図示しなさい.

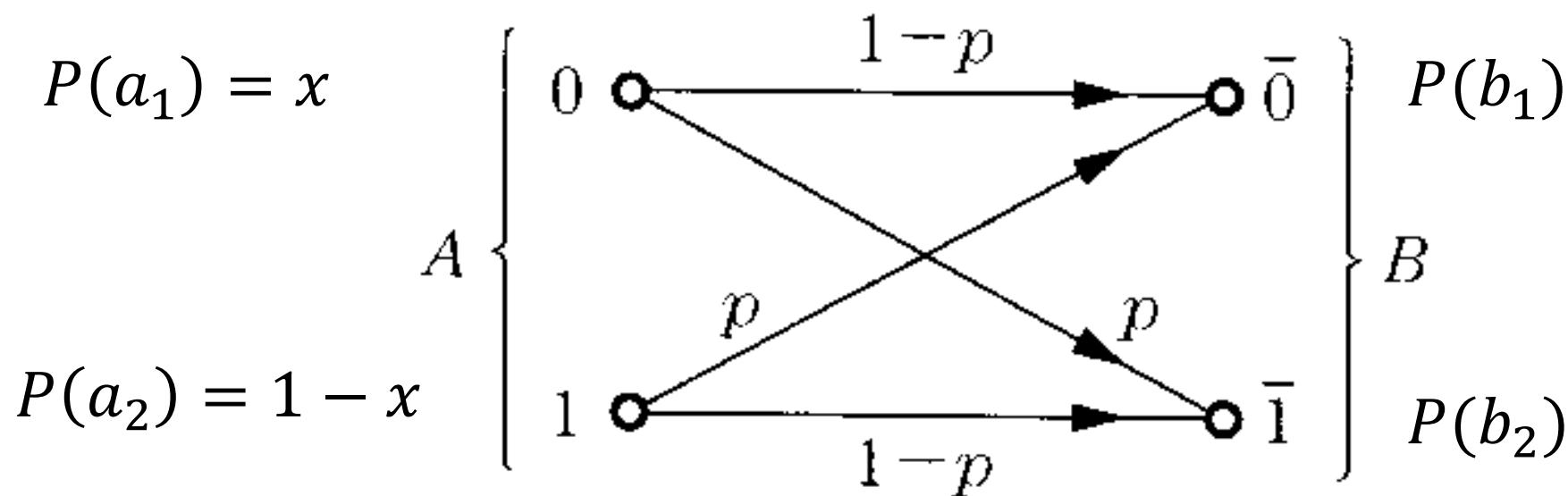


图 7.3 2 元对称通信路 (BSC)

(1) 2元対称通信路

(2) 誤り確率

(3)

$$P(b_1) = (1-p)x + p(1-x) = x + p - 2px$$

$$P(b_2) = (1-p)(1-x) + px = 1 - (x + p - 2px)$$

(4) $x + p - 2px = \alpha$ とおくと, $P(b_1) = \alpha$, $P(b_2) = 1 - \alpha$ となり,

$$H(B) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) = H(\alpha)$$

エントロピー関数で表される.

(5)

$$H(B|A) = -\sum_A \sum_B P(a, b) \log P(b|a)$$

$$= -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

$$= H(p)$$

(5)における式の導出

$$P(a_1, b_1) = P(b_1|a_1)P(a_1) = (1 - p)x$$

$$P(a_1, b_2) = P(b_2|a_1)P(a_1) = px$$

$$P(a_2, b_1) = P(b_1|a_2)P(a_2) = p(1 - x)$$

$$P(a_2, b_2) = P(b_2|a_2)P(a_2) = (1 - p)(1 - x)$$

$$H(B|A)$$

$$= (1 - p)x\log(1 - p) + px\log(p)$$

$$+ p(1 - x)\log(p) + (1 - p)(1 - x)\log(1 - p)$$

$$= -p\log(p) - (1 - p)\log(1 - p)$$

(6) 一般の定義は, 7.8 節の式 (7.60) (p. 97 参照) で与えられるが, 本問では, $n=2$ であり, $P(a_1)=x$, $P(a_2)=1-x$ とおいているので,

$$C = \max_{0 \leq x \leq 1} I(A; B)$$

(7) (4), (5) から,

$$I(A; B) = H(B) - H(B|A) = H(\alpha) - H(p)$$

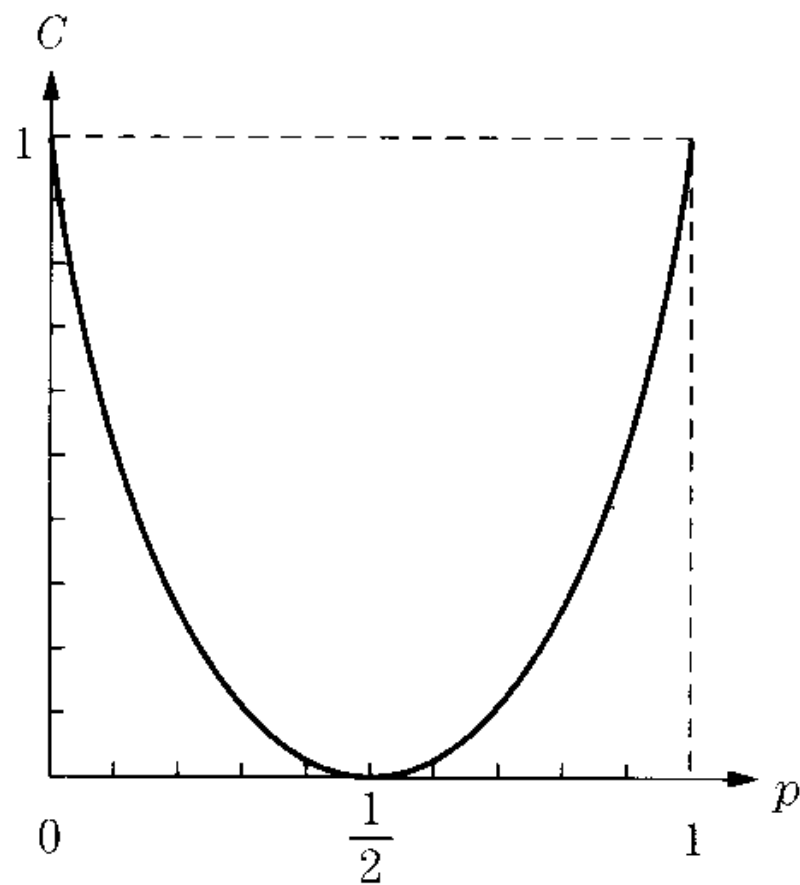
(6) より,

$$\begin{aligned} C &= \max_{0 \leq x \leq 1} I(A; B) \\ &= \max_{\alpha} [H(\alpha) - H(p)] \\ &= \max_{\alpha} [H(\alpha)] - H(p) \end{aligned}$$

ここで, $H(\alpha)$ は $\alpha = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{1}{2}$) で最大値 1 をとる.

$$\therefore C = 1 - H(p)$$

(8) $C = C(p) = 1 - H(p)$ を図示すると解図 7.1 のようになる.



解図 7.1