第8章　通信路符号化

通信路符号化とは

通信路の外乱(雑音)により伝送中に誤りが生じた場合，その誤りを検出・訂正するために，情報源符号化された符号系列に冗長部分を加える符号化方式

→通信の信頼性を向上させる

通信路符号化定理（シャノンの第2基本定理）

誤り確率ゼロの伝送を行うためには，伝送速度に上限がある.

8.1 シャノン·ファノの通信システムのモデル

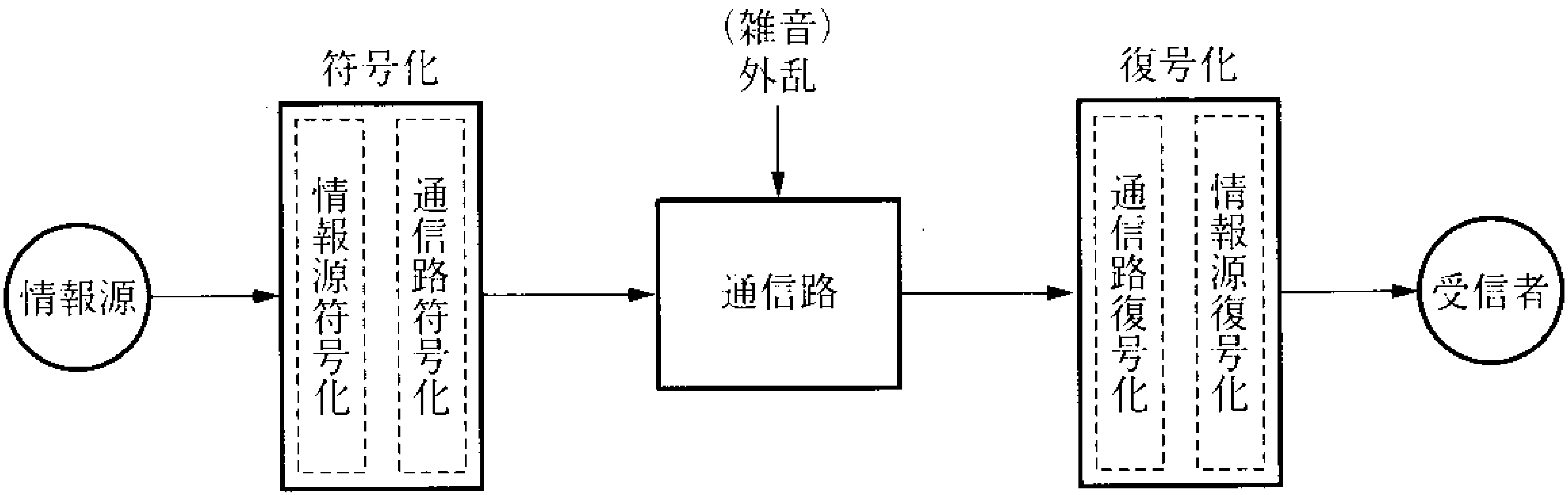


図 8.1　シャノン・ファノの通信システムのモデル

8.2 通信路符号化とは

情報源符号化　平均符号長を最小化
通信路符号化　冗長部分を加えて信頼性を高める
符号＝情報部分＋冗長部分

表 8.1　情報源符号化と通信路符号化の比較

	最終目標	実現理念	符号の長さ	定　理	指　針
情報源符号化	効率化	エネルギー・時間の節約	最短符号の実現	情報源符号化定理（シャノンの第1基本定理）	$L \geq H(S)$
通信路符号化	信頼性の向上	誤りの検出・訂正	冗長性の付加	通信路符号化定理（シャノンの第2基本定理）	$R \leq C$

通信路符号化の例

記号（シンボル）a，bを伝送する
最短符号化　　　a→0，b→1
冗長部分の付加　a→0+00=000，b→1+11=111

010を受信→000または111ではない→誤りと判定
→多数決により000に訂正

011を受信→000または111ではない→誤りと判定
→多数決により111に訂正

誤り検出・訂正符号
　線形符号，巡回符号

8.3　通信路符号化定理

定理8.1　通信路符号化定理（シャノンの第2基本定理）
通信容量C^*[bit/秒]の通信路を伝送速度R[bit/秒]で情報を送るとき，

$$R \leq C^*$$

ならば，適切な通信路符号化を行うことにより，誤り確率が限りなくゼロに近い伝送が可能である．

7.8節では，通信路容量$C = maxI(A|B)$[bit/送信記号]

$$C^* = kC, \qquad k = \text{送信記号数/秒}$$

8.4 雑音のない通信路の符号化定理 ー情報源符号化定理と同値ー

平均符号長L, r元符号

雑音のない通信路

1個の符号構成記号を伝送する時間＝τ秒

1個の符号語（平均符号長＝L）を伝送する時間＝τL

1個の符号語を伝送する速度

$\hat{R} = 1/\tau L$ ［符号語/秒］,　符号語＝情報源記号

ここで，雑音のない通信路の通信路容量 C〔bit/送信記号〕は，

$$C = \max_{\left\{\begin{array}{l} P(a_k)\ (k=1,\cdots,n) \\ \sum_{k=1}^{n} P(a_k)=1 \end{array}\right\}} I(A;B)$$

$$=\max[H(A)-H(A|B)]$$

$$=\max H(A) \qquad (\because \text{雑音のない通信路なので } H(A|B)=0)$$

$$=\log r \quad \text{〔bit/送信記号〕} \qquad (8.8)$$

r元符号→$\max H(A)$は等確率$1/r$のとき

$$\max H(A) = -\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{r}\right) \log \left(\frac{1}{r}\right) = \log r$$

$$k = 1/\tau$$

$$C^* = \frac{C}{\tau} = \frac{\log r}{\tau} \qquad \therefore \frac{1}{\tau} = \frac{C^*}{\log r}$$

$$\widehat{R} = \frac{C^*}{L \log r} \rightarrow \frac{C^*}{H(S)} \quad \Longleftarrow \quad \frac{H(S)}{\log r} \leq L < \frac{H(S)}{\log r} + 1$$

【定理 8.2】《雑音のない通信路の符号化定理》（シャノンの第1基本定理）

無記憶情報源 S の情報を，通信路容量 C^*〔bit/秒〕の通信路を通して伝送するとき，

$$\frac{C^*}{H(S)} \quad \text{〔情報源記号/秒〕} \tag{8.13}$$

に限りなく近い高速度で情報を伝送する符号化法が存在する．

第９章　誤り検出と訂正

9.1　冗長性

情報源符号化→符号語（情報部分）
（情報ビット）・・２元符号
誤り検出・訂正のための冗長性（検査部分）
（検査ビット）・・２元符号

符号語＝情報部分（情報ビット）＋検査部分（検査ビット）

9.2 パリティ検査(チェック)

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x}, p)$$

$$(u_1, \cdots, u_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n, p)$$

ここで,

$$\left.\begin{array}{ll} u_k \in \{0, 1\} & (k = 1, \cdots, n+1) \\ x_k \in \{0, 1\} & (k = 1, \cdots, n) \\ p \in \{0, 1\} & \end{array}\right\}$$

以下のような規則で p を決定する．

［偶数パリティ］

$$x_1+\cdots+x_n+p=0 \quad \therefore p=x_1+\cdots+x_n$$

［奇数パリティ］

$$x_1+\cdots+x_n+p=1 \quad \therefore p=x_1+\cdots+x_n+1$$

2を法とする
加法（mod2）

$$\left.\begin{array}{l} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{array}\right\}$$

受信信号における誤り検出
（偶数パリティの場合）

$$y_1+\cdots+y_{n+1}=\begin{cases} 0 & \text{（誤りなし）} \\ 1 & \text{（誤りあり）} \end{cases}$$

【例 9.1】

$$\boldsymbol{x} = 1001101$$

に対して，偶数パリティなら

$$1+0+0+1+1+0+1+p=0 \quad \therefore p=0$$

奇数パリティなら

$$1+0+0+1+1+0+1+p=1 \quad \therefore p=1$$

9.3 ハミング距離

2つの記号系列の違いを評価する

1，0が異なる要素の数

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{n}\delta(x_k,y_k)$$

$$\delta(x_k,y_k)=\begin{cases}0 & (x_k=y_k)\\ 1 & (x_k\neq y_k)\end{cases}$$

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$$

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2$$

【例 9.2】

$$
\begin{array}{rcccccc}
\boldsymbol{x}= & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
\boldsymbol{y}= & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

この場合は，異なる箇所は3箇所であり，$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=3$

3 個の 0, 1 からなる系列 $\boldsymbol{x} = x_1 x_2 x_3$ は

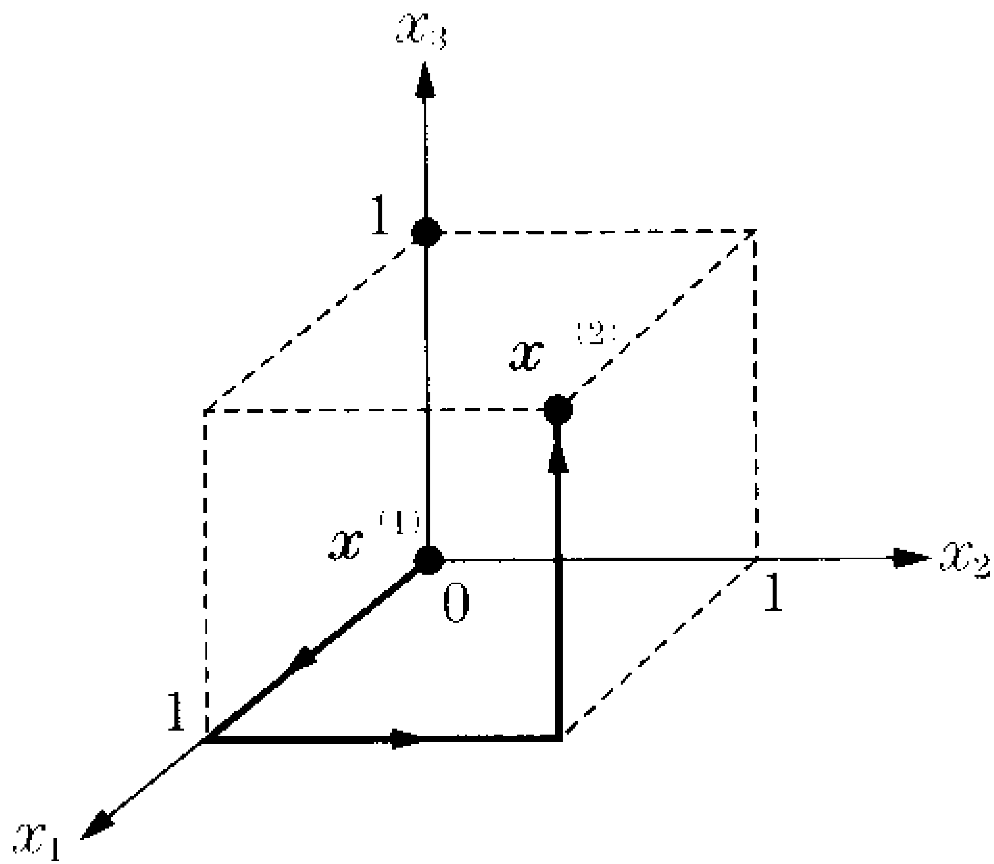


図 9.1　3 次元空間におけるハミング距離

$\boldsymbol{x} = x_1 \cdots x_n$ のハミング重み

$w(\boldsymbol{x}) = h(\mathbf{0}, \boldsymbol{x})$　$\boldsymbol{x}$に含まれる1の数

$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$

符号 C の最小ハミング距離　　符号 $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n\}$

$$d_{\min}(C) = \min_{\substack{\forall (\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{c}_\ell) \\ k \neq \ell}} h(\boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{c}_\ell)$$

この値が大きいほど符号語が互いに離れており，
誤りに強い

9.4 誤り検出と訂正の原理

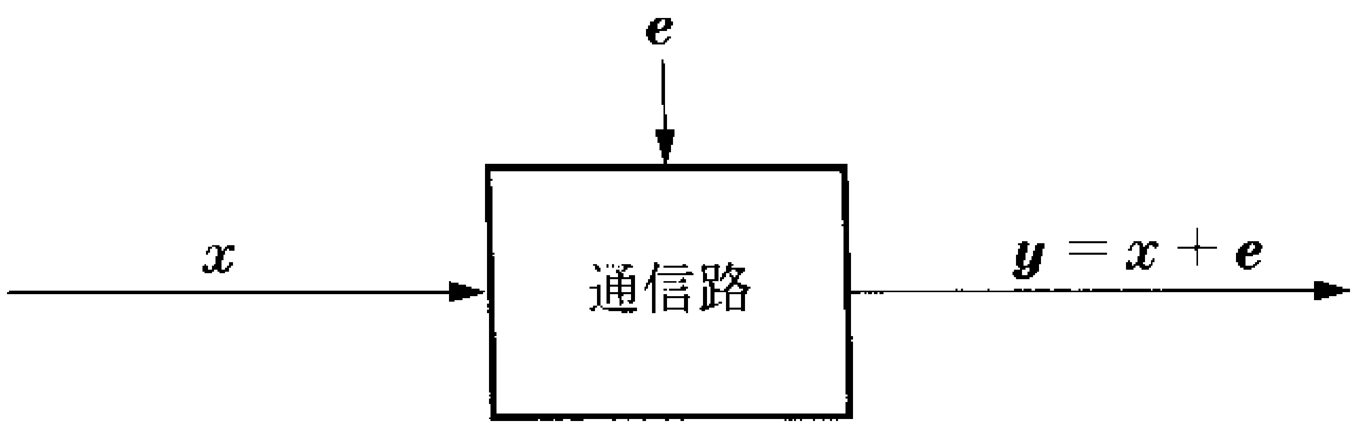


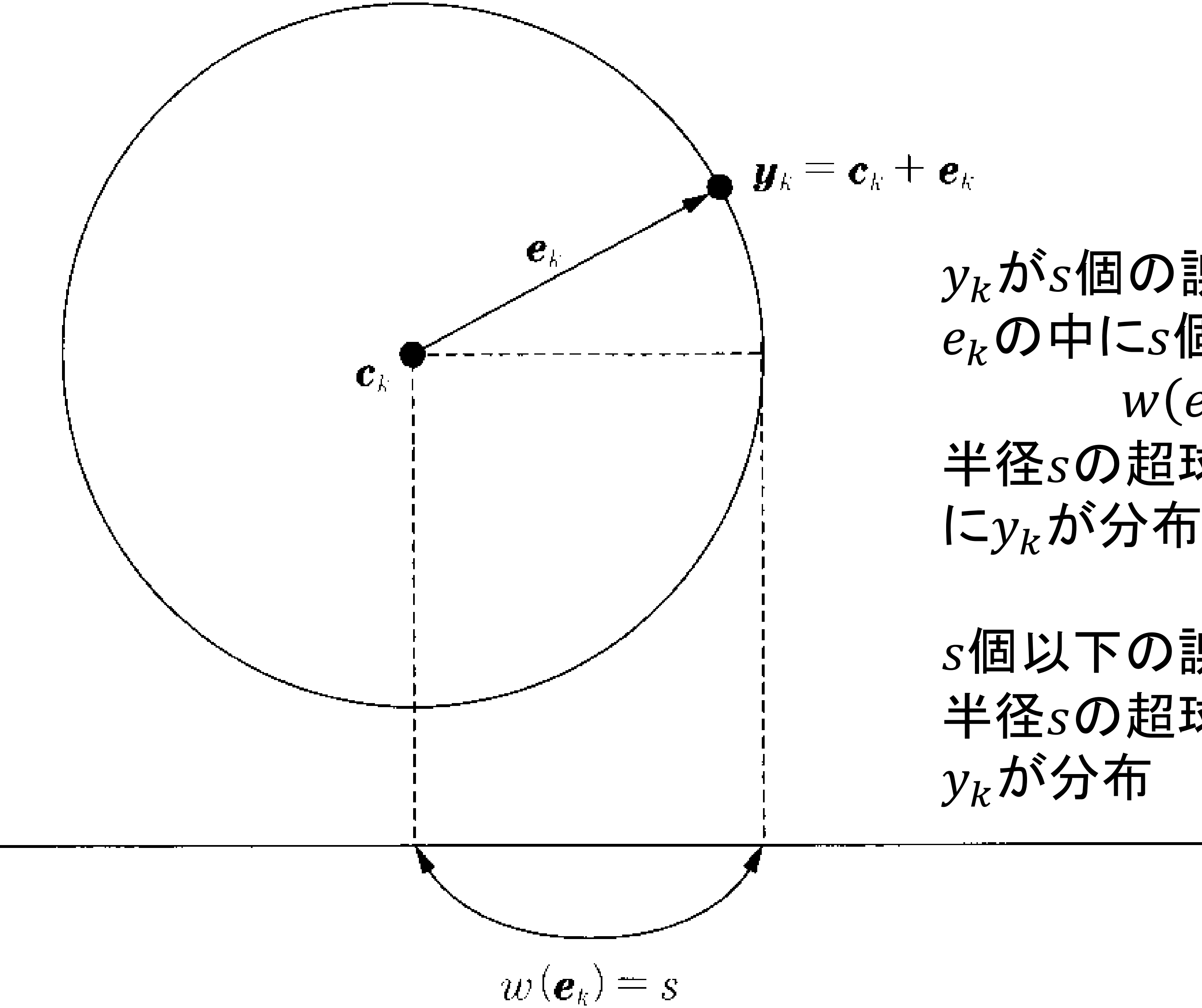
図 9.2　通信路での伝送

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$$

符号 $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_n\}$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{y}_\ell = \boldsymbol{c}_\ell + \boldsymbol{e}_\ell$$



y_kがs個の誤りを含む
e_kの中にs個の1を含む

$$w(e_k) = s$$

半径sの超球体の表面上にy_kが分布

s個以下の誤りを含む
半径sの超球体の内部にy_kが分布

図 9.3　誤り空間

S個以下の誤りの検出

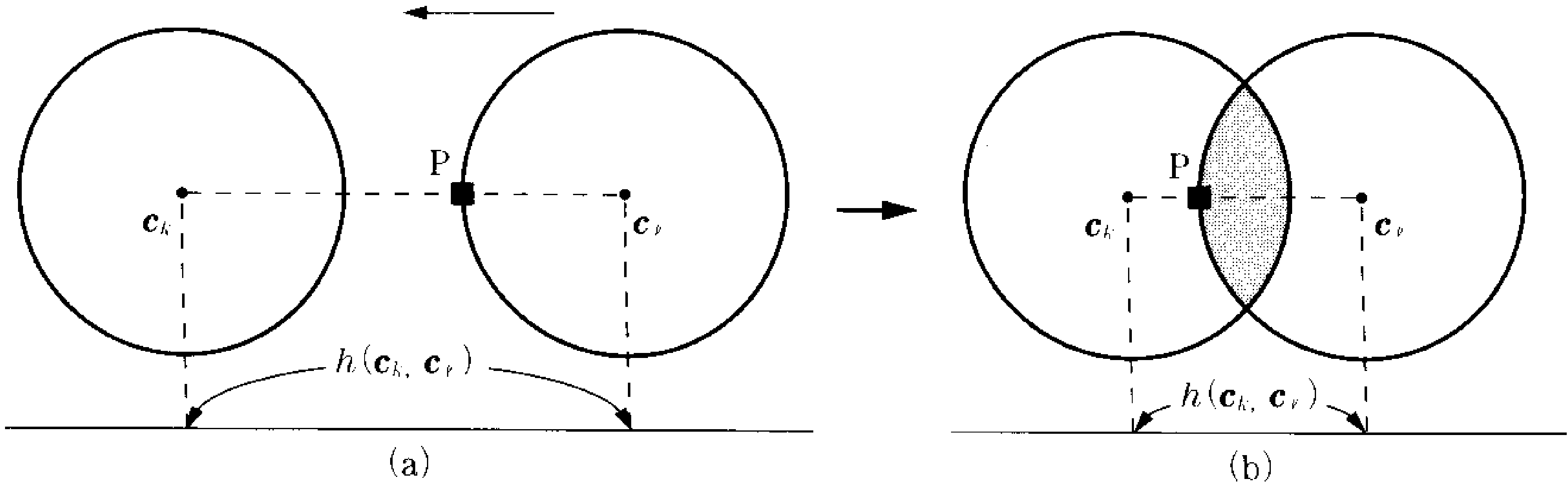


図 9.4　誤り空間（交差）

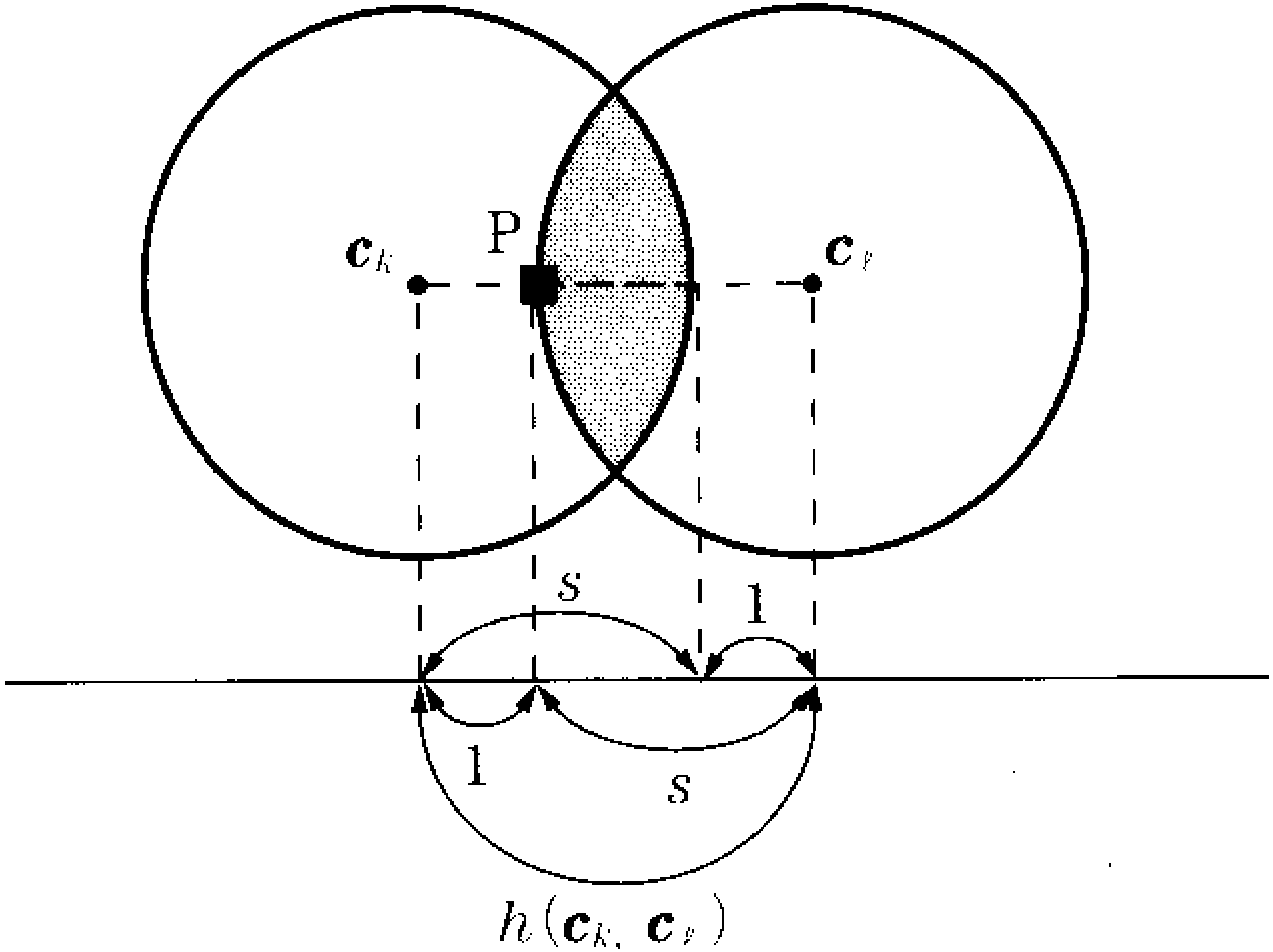


図 9.5　s 個以下の誤りの検出原理

$$d_{\min}(C) \geq s + 1$$

t個以下の誤り訂正

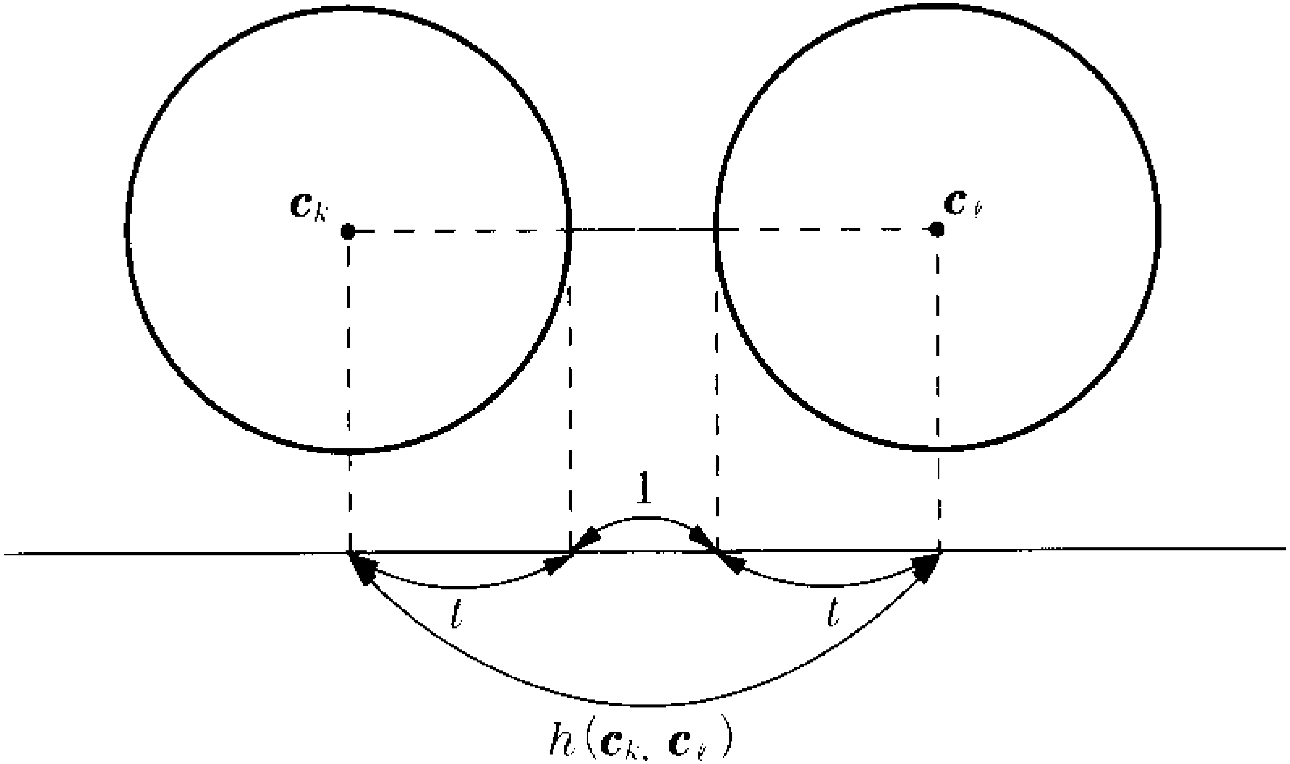


図 9.6　t 個以下の誤りの訂正原理

$$d_{\min}(C) \geq 2t+1$$

誤りを訂正するには2つの円が最低限交わってはいけない.

ハミング距離で1以上離れている(少なくとも1離れている)こと