平成27年度前期
電子情報工学科(4年生)

情報理論 I
中間試験(100点満点)
<問題と解答例>

2015. 6. 11

教科書，資料等の持ち込み不可.
電卓使用可

問題1(10点)

ある壺の中に赤玉が4個，青玉が2個，白玉が2個入っている. この壺から1個の玉を取り出すときのエントロピー(平均情報量)を求めよ.

<解答例>
赤玉を取り出す確率 $p_1 = 4/8 = 0.5$
青玉を取り出す確率 $p_2 = 2/8 = 0.25$
白玉を取り出す確率 $p_3 = 2/8 = 0.25$

エントロピー

$$H = \sum_{i=1}^{3} -p_i \log_2 p_i = 1.5\ [bit]$$

問題2(15点満点)
二つのサイコロを振ったとき，その目の和が6であり，サイコロの目も分かっていた. 後日，そのサイコロの目を忘れてしまった. このとき失われた情報量(ビット)を求めよ.

<解答例>
①目の和が6であり，目の組み合わせも分かっている(1通りである)事象
確率: $p_1 = 1/36$
自己情報量: $I_1 = -\log_2 p_1 = 5.17[bit]$
②目の和が6であり，目の組み合わせが不明である事象
目の和が6の組み合わせ=(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
確率: $p_2 = 5/36$
自己情報量: $I_2 = -\log_2 p_2 = 2.85[bit]$
③失われた情報量: $I = I_1 - I_2 = 2.32\ [bit]$

問題3(10+5=15点)

2人の学生の20科目の成績が以下のようになっている. 以下の問に答えよ.

(1)2人の成績のエントロピー$H(A), H(B)$を求めよ.
(2)2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ.
(参考)エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する.

成績	S	A	B	C
A君	5	4	5	6
B君	2	14	3	1

<解答例>

A君の成績の確率

$$p(S) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},\quad p(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$
$$p(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4},\quad p(C) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

B君の成績の確率

$$p(S) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10},\quad p(A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$
$$p(B) = \frac{3}{20},\quad p(C) = \frac{1}{20}$$

これらの確率をエントロピーの式に代入する.

$$H(A) = -\sum_{x=S,A,B,C} p(x)\log_2 p(x)$$
$$= -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{10}\log_2\frac{3}{10}$$
$$= 1.99\quad [bit]$$
$$H(B) = -\sum_{x=S,A,B,C} p(x)\log_2 p(x)$$
$$= -\frac{1}{10}\log_2\frac{1}{10} - \frac{7}{10}\log_2\frac{7}{10} - \frac{3}{20}\log_2\frac{3}{20} - \frac{1}{20}\log_2\frac{1}{20}$$
$$= 1.32\quad [bit]$$

A君の成績のほうがB君の成績よりもエントロピーが高い.

＜エントロピーの違いの説明＞

エントロピーは曖昧(不確実)さを表している．従って，エントロピーが高いほど，予測や推定が難しい．

A君の成績はS～Cがほぼ同じであり，ある科目の成績を推定(予測)することが難しいので，曖昧さが大きいと言える．一方，Bの成績はAに集中しており，ある科目の成績はAであると推定できるので，曖昧さが小さいと言える．

問題4（10×3＝30点）

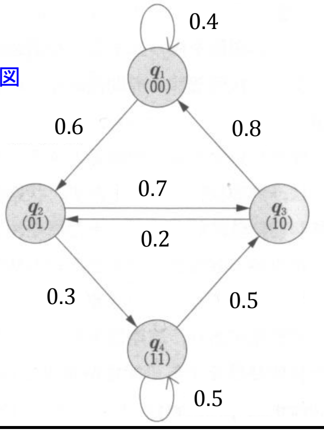
記号0,1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている．以下の問に答えよ．

$$p(0|00)=0.4,\quad p(1|00)=0.6$$
$$p(0|01)=0.7,\quad p(1|01)=0.3$$
$$p(0|10)=0.8,\quad p(1|10)=0.2$$
$$p(0|11)=0.5,\quad p(1|11)=0.5$$

（1）状態遷移図を図示せよ(状態遷移確率も付記)．
（2）各状態の定常確率$P(00),P(01),P(10),P(11)$を求めよ(分数として求めよ)．
（3）情報源のエントロピーを求めよ(有効数字3桁の小数で表せ)．

＜解答例＞

（1）状態遷移図



（2）定常確率$P(00),P(01),P(10),P(11)$

$$P(00)+P(01)+P(10)+P(11)=1\cdots(1)$$
$$P(00)=0.4P(00)+0.8P(10)\cdots(2)$$
$$P(01)=0.6P(00)+0.2P(10)\cdots(3)$$
$$P(10)=0.7P(01)+0.5P(11)\cdots(4)$$
$$P(11)=0.3P(01)+0.5P(11)\cdots(5)$$

式(1)と式(2)～(5)の内の3つの方程式を連立させて解く．結果は次のようになる．

$$P(00)=\frac{20}{59},P(01)=\frac{15}{59},P(10)=\frac{15}{59},P(11)=\frac{9}{59}$$

（3）情報源のエントロピー

$$H(S)=H(0.4)P(00)+H(0.3)P(01)+H(0.2)P(10)+H(0.5)\,P(11)$$

（2）の結果とエントロピーの数値(電卓で計算)より，次のように求まる．

$$H(s)=0.971\times\frac{20}{59}+0.881\times\frac{15}{59}+0.722\times\frac{15}{59}+1\times\frac{9}{59}=0.889\ [bit]$$

問題5（15点）

$a_1=0,a_2=1$の生起確率が$p_1=0.38,p_2=0.62$である2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon=0.1$であるときの伝送情報量を求めよ．

＜解答例＞

伝送情報量

$$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon) \quad [bit/\text{記号}]$$

$$p = 0.38, \qquad \varepsilon = 0.1$$

$$\begin{aligned} v &= p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) \\ &= 0.38 \times 0.1 + (1-0.38) \times (1-0.1) \\ &= 0.596 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon) \\ &= H(0.6) - H(0.1) = H(0.4) - H(0.1) \\ &= 0.971 - 0.469 = 0.502 \quad [bit/\text{記号}] \end{aligned}$$

問題6（5×3＝15点）

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる.

$$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon) \quad [bit/\text{記号}]$$

以下の問に答えよ.

（1）$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ.

（2）$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ. さらに, 最大値とεの関係を定性的に説明せよ.

（3）$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ. さらに, 最小値とεの関係を定性的に説明せよ.

＜解答例＞

（1）$p = 1/2$のとき$p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) = 1/2$となるから

$$I(A;B) = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon)$$

（2）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において, $0 \le H(\varepsilon) \le 1$であるから, $H(\varepsilon) = 0$のときに$I(A;B)$は最大値＝1となる.
$H(\varepsilon) = 0$ となるのは$\varepsilon = 0, 1$のときである.

＜$I(A;B)$の最大値とεの関係＞

$\varepsilon = 0 (\varepsilon = 1)$のときは, 誤りなし（完全に誤る）なので, 例えば, 0を受信した場合は0（1）が送信されたと判断できる. 従って, 送信記号が100%（$I(A;B) = 1$）送られたことになる.

（3）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において, $H(\varepsilon)$ =1のときに$I(A;B)$は最小値＝0となる. $H(\varepsilon)$ =1となるのは$\varepsilon = 0.5$のときである.

＜$I(A;B)$の最小値とεの関係＞

$\varepsilon = 0.5$のときは, 例えば, 0を送信すると同じ確率で0と1が受信される. 言い換えると0を受信しても, 0が送信されたか, 1が送信されたか全く不明である. すなわち, 送信記号は全く送られていない（$I(A;B) = 0$）ことになる.