情報数学

中山クラス
第１１週

＜今日の内容＞

◇演習問題（前回）の解説
◇小テスト予想問題の解説
◇第2章　ベイズの定理とその応用
　２．ベイズ定理の変形
　３．壷の問題

演習問題（前回）の解説

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである．
Ａ店　あんパン，メロンパン，クロワッサン
Ｂ店　サンドウィッチ，フランスパン，あんパン
Ｃ店　メロンパン，あんパン，クリームパン

＜ベイズの定理を用いて計算すること＞

1. ある人があんパンを買ったとき，それをＡ店で買った確率を求めよ．
2. ある人がメロンパンを買ったとき，それをＣ店で買った確率を求めよ．
3. ある人がフランスパンを買ったとき，それをＢ店で買った確率を求めよ．

＜1．の問題について＞

事象F（カードfである）・・・ A店で買う

事象W（白色である）　・・・ あんパンを買う

$$P(F|W) = \frac{P(W|F)P(F)}{P(W)}$$

$P(F)$：A店で買う確率→3店から1店を選ぶ→1／3

$P(W|F)$：A店の中であんパンを買う確率→3種類から1種類を選ぶ→1／3

$P(W)$：あんパンを買う確率→全ての組合せ9通り[①～⑨]からあんパンを含む組合せ[①，⑥，⑧]を選ぶ→3／9＝1／3

全ての組合せ＝9通り

①Aーあんパン，②Aーメロンパン，③Aークロワッサン，
④Bーサンドウィッチ，⑤Bーフランスパン，⑥Bーあんパン，
⑦Cーメロンパン，⑧Cーあんパン，⑨Cークリームパン

＜1＞

$$P(F|W) = \frac{P(W|F)P(F)}{P(W)}$$

$P(F)$＝A店で買う確率→1／3
$P(W|F)$＝A店の中であんパンを買う確率→1／3
$P(W)$＝あんパンを買う確率→3／9

$$P(F|W) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}$$

＜2＞

$$P(F|W) = \frac{P(W|F)P(F)}{P(W)}$$

$P(F)$＝C店で買う確率→1／3
$P(W|F)$＝C店の中でメロンパンを買う確率→1／3
$P(W)$＝メロンパンを買う確率→[②, ⑦]→2／9

$$P(F|W) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$$

＜３＞

$$P(F|W) = \frac{P(W|F)P(F)}{P(W)}$$

$P(F)$＝Ｂ店で買う確率→１／３
$P(W|F)$＝Ｂ店でフランスパンを買う確率→１／３
$P(W)$＝フランスパンを買う確率→[⑤]→１／９

$$P(F|W) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 1$$

小テストの予想問題

答えが数値の場合は分数（約分→簡単にする）または小数（有効数字3桁以内＜四捨五入＞）で表現.

問題1＜確率の計算，同時確率＞

サイコロを投げたとき，奇数の目が出ることを事象A，3の倍数の目が出ることを事象Bとする.
以下の確率を求めよ.

$$P(A), \qquad P(B), \qquad P(A \cap B)$$

＜ヒント＞
全体：6通り
$P(A)$: 1, 3, 5, $P(B)$: 3, 6, $P(A \cap B)$: 3

問題2＜二項分布＞

（1）サイコロを3回投げ，そのうち3の目が1回出る確率を求めよ.

$$p_1 = {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1}$$

（2）コインを5回投げ，そのうち3回で表が出る確率を求めよ.

$$p_3 = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

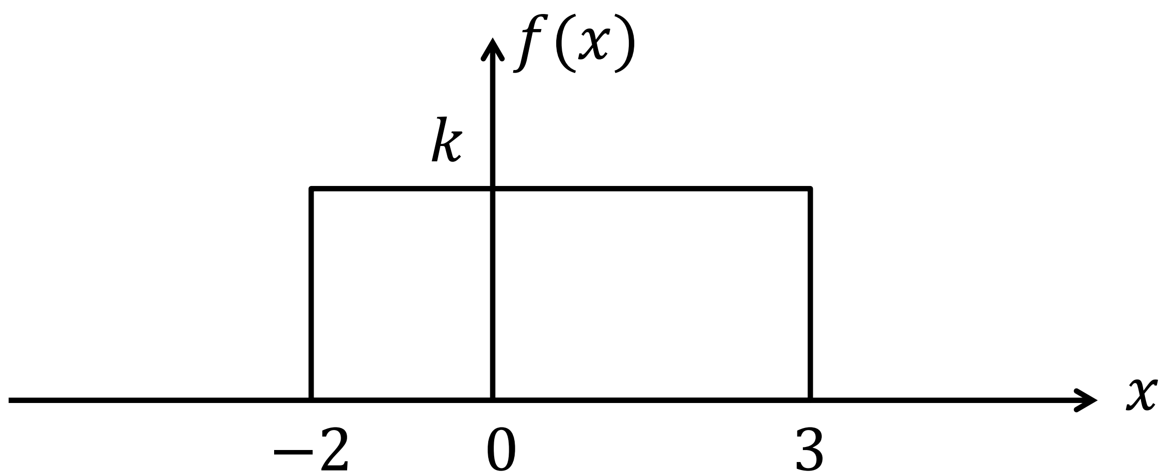
問題3＜確率分布＞

確率密度関数$f(x)$が下図で与えられる一様分布に関して以下の問に答えよ.

（１）kを求めよ.

（２）平均値μを求めよ.

（３）分散σ^2を求めよ.



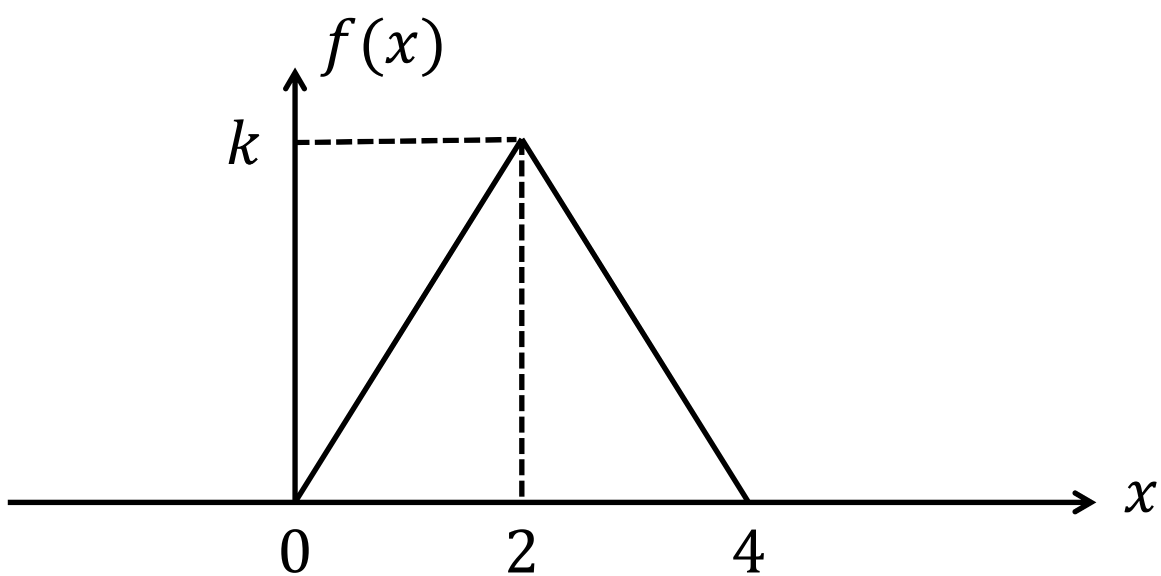
問題4＜確率分布＞

確率密度関数$f(x)$が下図で与えられる一様分布に関して以下の問に答えよ.

（1）kを求めよ.

（2）平均値μを求めよ.

（3）分散σ^2を求めよ.



連続的な確率変数の確率密度関数，平均値，分散

kの値：確率密度関数の面積＝1より求める．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

平均値（期待値）

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

分散

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

＊積分範囲は確率密度関数が定義されている範囲

問題3

（1）$f(x)$の面積＝1より

$$k(3+2) = 5k = 1, \qquad k = 1/5$$

（2）平均値

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{3} \frac{1}{5} x dx$$

（3）分散

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-2}^{3} (x-\mu)^2 \left(\frac{1}{5}\right) dx$$

問題4

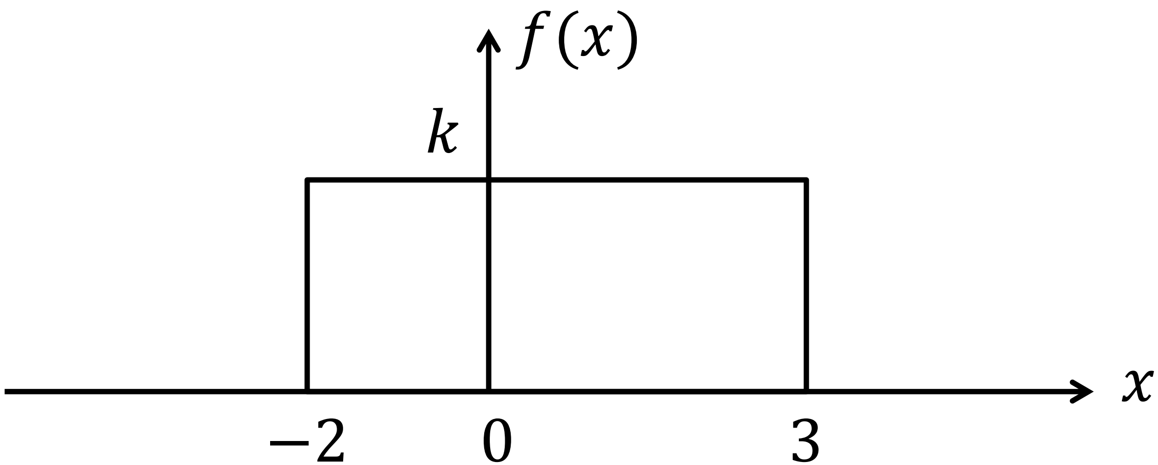
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{k}{2}(x-4), & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

問題5＜確率計算＞

確率密度関数$f(x)$が下図で与えられる一様分布に関して以下の問に答えよ.

（１）kを求めよ.

（２）確率変数が $0 \leq x \leq 2$ の値を取る確率を求めよ.

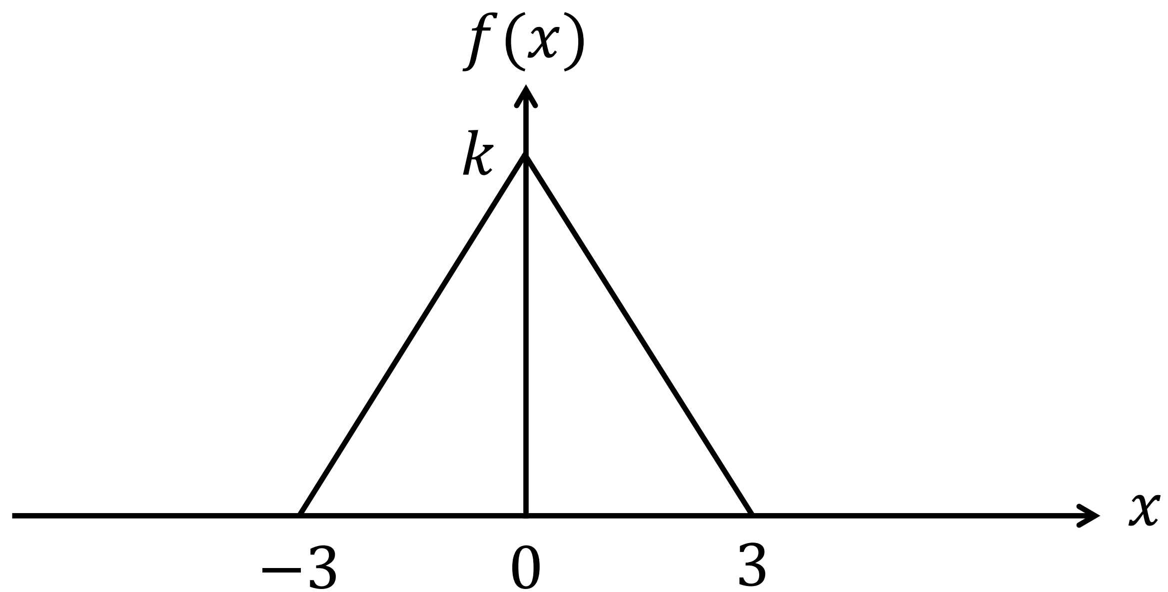


問題６＜確率計算＞

確率密度関数$f(x)$が下図で与えられる一様分布に関して以下の問に答えよ.

（１）kを求めよ.

（２）確率変数が $0 \leq x \leq 2$ の値を取る確率を求めよ.



確率の計算：連続的な確率変数の場合

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

問題５（２）

$$f(x) = k, -2 \leq x \leq 3$$

$$P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^2 kdx = 2k$$

問題６（２）

$$f(x) = -\frac{k}{3}(x-3), \qquad 0 \leq x \leq 3$$

$$P(0 \leq x \leq 2) = \int_0^2 -\frac{k}{3}(x-3)dx$$

問題7＜ポアソン分布における確率計算＞

ある都市の1日の交通事故死亡者数が3日間で1，2，3人だとする．このような事象が起こる確率を求めよ．

但し，死亡者数x人に対する確率はポアソン分布に従うものとする．また，1日の平均死亡者数（期待値）は$\theta = 1$人とする．

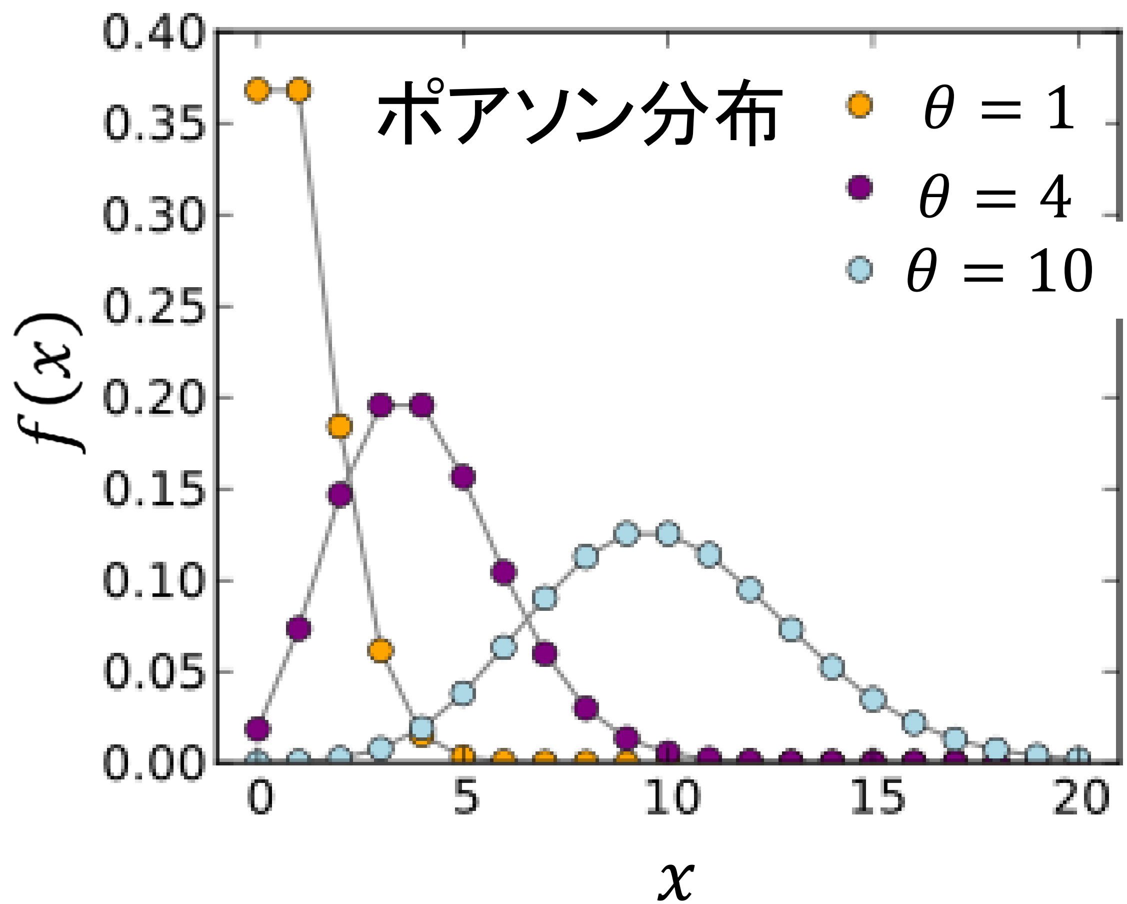
$$f(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}$$

$$e = 2.72$$

◇式から計算

◇グラフから読み取る

◇表から読む



問題8＜条件付き確率＞

ある客船の乗客について以下のことが分かっている.

- 日本人が50%である.
- 男性が60%である.
- 日本人女性が20%である.

男性のなかから1人を選び出したとき, それが日本人である確率を求めよ.

＜解答例＞

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

事象A: 男性, 事象B: 日本人

$P(B|A)$: 求めるもの. 条件より,

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3$$

これらを上式に代入して$P(B|A)$を求める.

問題9＜条件付き確率＞

ある客船の乗客について以下のことが分かっている.

- 日本人男性が30%である.
- 男性のなかで日本人は60%である.

乗客から1人を選んだとき，それが男性である確率を求めよ.

＜解答例＞

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$$

事象A:男性，事象B:日本人，求めるもの:$P(A)$

条件より，日本人男性:$P(A\cap B)=0.3.$

男性のなかの日本人の割合:$P(B|A)=0.6.$

これらを上式に代入して$P(A)$を求める.

問題10＜条件付き確率＞

ある客船の乗客について以下のことが分かっている.

- 日本人が50%である.
- 日本人のなかで男性は60%である.

乗客から1人を選んだとき，それが日本人男性である確率を求めよ.

＜解答例＞

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

事象A：日本人，事象B：男性，求めるもの：$P(A \cap B)$

条件より，日本人：$P(A) = 0.5.$

日本人のなかの男性の割合：$P(B|A) = 0.6.$

これらを上式に代入して$P(A \cap B)$を求める.

問題11＜ベイズの定理＞

★後で，説明する★

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである．

A店　あんパン，メロンパン

B店　クロワッサン，フランスパン，あんパン，ジャムパン

C店　メロンパン，あんパン，クリームパン

＜ベイズの定理を用いて計算すること＞

1. ある人があんパンを買ったとき，それをA店で買った確率を求めよ．
2. ある人がメロンパンを買ったとき，それをC店で買った確率を求めよ．
3. ある人がフランスパンを買ったとき，それをB店で買った確率を求めよ．

問題12＜ベイズの定理＞

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．３軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- A店でパンを買った人は30人．
- あんパンを買った人は20人．
- A店におけるあんパンの割合は30%である．

あんパンを買った人のうち，A店で買った人の割合（%）を求めよ．

＜解答例＞

A店：X，あんパン：Y → 求めるもの＝$P(X|Y)$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

$$P(X) = 0.3, P(Y) = 0.2, P(Y|X) = 0.3 \rightarrow P(X|Y)$$

問題13＜ベイズの定理＞

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人に聞いたところ，以下のことが分かりました．

- B店でパンを買った人は30人．
- メロンパンを買った人は20人．
- メロンパンを買った人のうち，B店で買った人は12人であった．

B店におけるメロンパンの割合（%）を求めよ．

＜解答例＞

B店：X，メロンパン：Y → 求めるもの＝$P(Y|X)$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

$$P(X) = 0.3, P(Y) = 0.2, P(X|Y) = 0.6 \to P(Y|X)$$

問題14＜ベイズの定理＞

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- フランスパンを買った人は20人．
- フランスパンを買った人のうち，C店で買った人は12人．
- C店におけるフランスパンの割合は30%．

100人のうち，C店でパンを買った人の割合（%）を求めよ．

＜解答例＞

C店 : X, フランスパン : Y → 求めるもの＝$P(X)$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

$$P(Y) = 0.2, P(X|Y) = 0.6, P(Y|X) = 0.3 \rightarrow P(X)$$

問題15＜ベイズの定理＞

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- A店でパンを買った人は20人．
- A店におけるクリームパンの割合は20%．
- クリームパンを買った人のうち，A店で購入した人の割合は40%．

100人のうち，クリームパンを買った人の割合(%)を求めよ．

＜解答例＞

A店 : X, クリームパン : Y → 求めるもの＝$P(Y)$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

$$P(X) = 0.2, P(Y|X) = 0.2, P(X|Y) = 0.4 \to P(Y)$$

２ ベイズ定理の変形 p.48

事象Bという結果をもたらす原因が複数ある場合

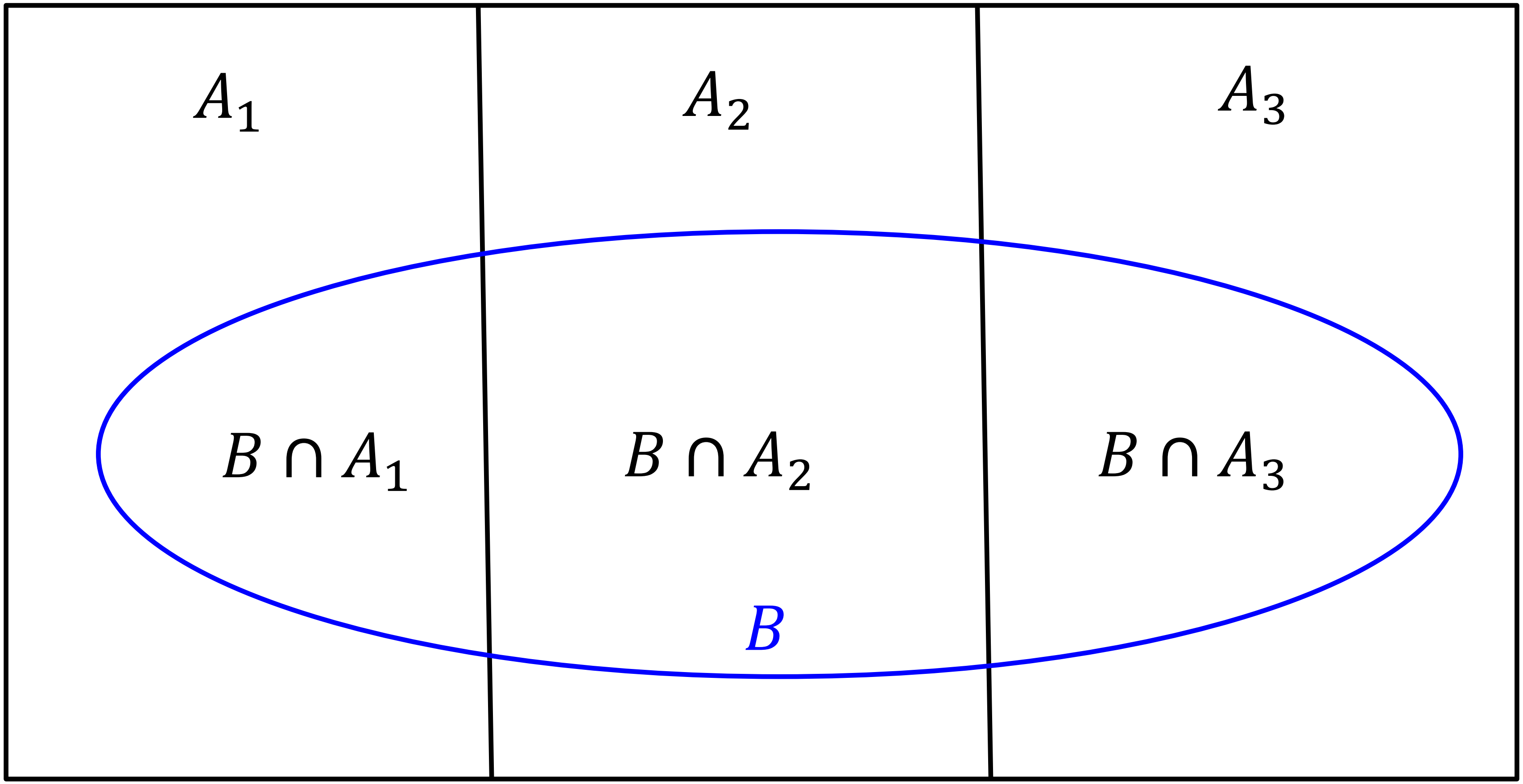
＜例＞
事象A1，A2，A3から事象Bが生じるものとする.
事象A1，A2，A3は同時には起こらない（共通部分がない）排反（排他的）であるとする.

この場合，$P(B)$は次式で表される.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

さらに，乗法定理により

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$
$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

ベイズ定理の変形

事象Bが生じたとき，その原因がA1である確率

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}$$

以下の条件において用いられる

- カードや箱の内容が分かっている→$P(B|A_i)$.
- カードや箱の選び方が排反（排他的）である.
- カードや箱を選ぶ確率が分かっている→$P(A_i)$.

例題

３枚のカードe，f，gが箱に入っている.

カードe：両面が白

カードf：片面が白，片面が黒

カードg：両面が黒

１枚のカードを箱から無作為に取り出して，机上に置く.
取り出したカードの上面が白のとき，そのカードがfである確率はいくらか.

＜解答例＞

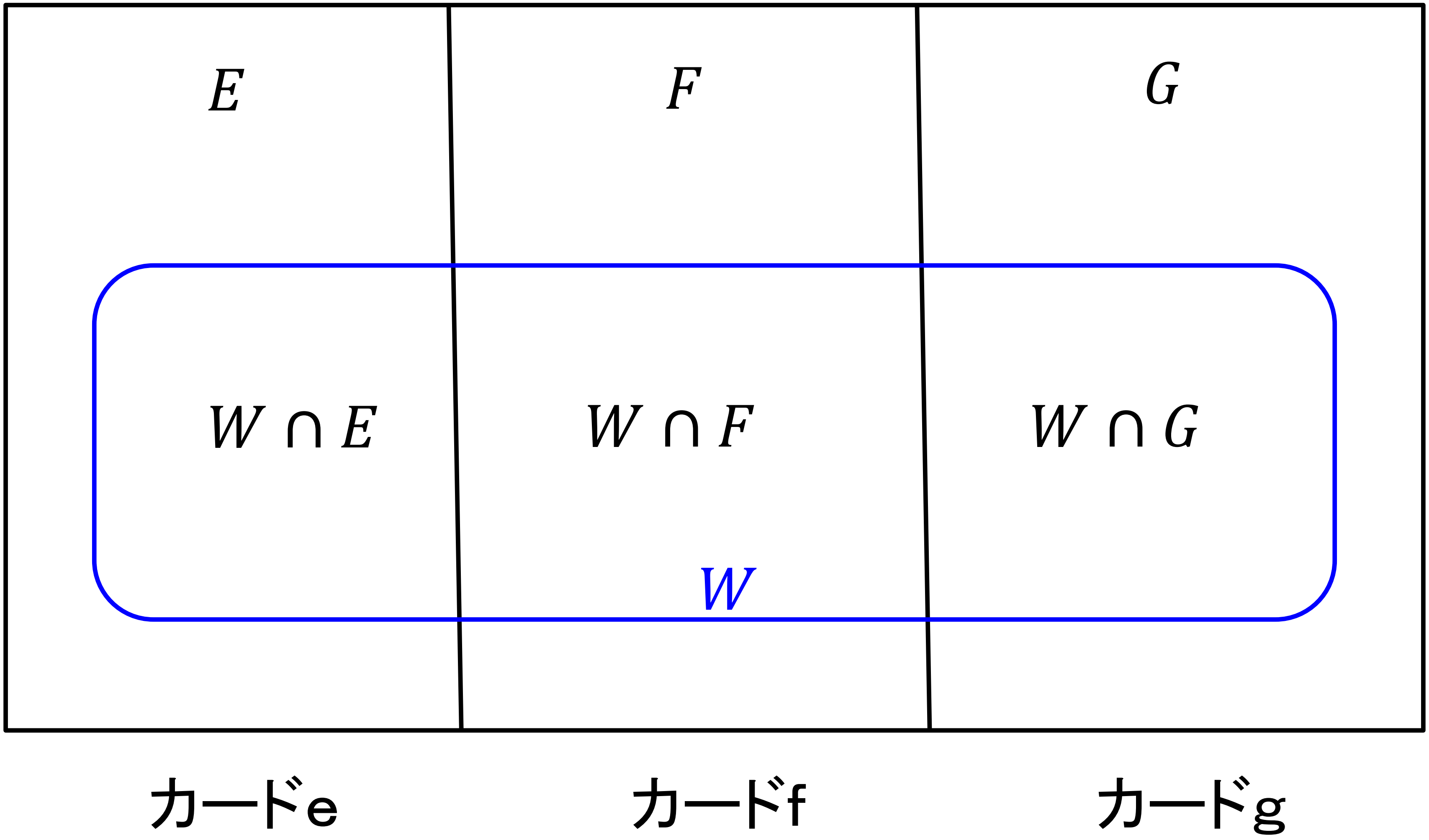
事象E：カードがeである.

事象F：カードがfである.

事象G：カードがgである.

事象W：上面の色が白である.

p.49



$$P(F|W) = \frac{P(W|F)P(F)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(W|F)P(F)}{P(W|E)P(E) + P(W|F)P(F) + P(W|G)P(G)}$$

$P(W|E) = 1$ ･･ カードeが取り出されたとき，白である確率

$P(W|F) = 1/2$ ･･ カードfが取り出されたとき，白である確率

$P(W|G) = 0$ ･･ カードgが取り出されたとき，白である確率

（カードXにおける白の割合（%））

$P(E) = P(F) = P(G) = 1/3$ ･･ 各カードを取り出す確率

$$P(F|W) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

３　壺の問題　p.51

＜例１＞

二つの壺a，bがある.
壺a　‥　赤玉3個，白玉2個（合計5個）
壺b　‥　赤玉8個，白玉4個（合計12個）
壺a，bが選ばれる割合は1：2

取り出された1個の玉が赤玉であったとき，それが壺aから取り出された確率を求めよ.

＜解答＞

事象A:　壺aから玉を取り出す

事象B:　壺bから玉を取り出す

事象R:　壺から取りだした玉が赤玉

求める確率:　$P(A|R)$

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)}$$

条件より,

$$P(R|A) = 3/5, P(R|B) = 8/12$$

$$P(A) = 1/3, \qquad P(B) = 2/3$$

これらを上式に代入する.

$$P(A|R) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{8}{12} \times \frac{2}{3}} = \frac{9}{29}$$

＜例2＞

二つの壺a，bがある.

壺a　‥　赤玉3個，白玉1個

壺b　‥　赤玉2個，白玉2個

1個取りだした玉が赤玉であったとき，それが壺aから取り出された確率を求めよ.

＜解答＞

事象A:　壺aから玉を取り出す

事象B:　壺bから玉を取り出す

事象R:　壺から取りだした玉が赤玉

求める確率:　$P(A|R)$

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)}$$

条件より, $P(R|A) = 3/5, P(R|B) = 8/12$

壺a, bを選ぶ確率は不明→同じ確率であるとする.

「理由不十分の原則」

$$P(A) = 1/2, \qquad P(B) = 1/2$$

これらを上式に代入する.

$$P(A|R) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

前回の演習問題（パン屋）について

この問題では下記の９通りが同じように確からしい（同じ確率で生じる）ことを前提としている．すなわち，①～⑨が買われる確率は全て同じで１／９である．

①A―あんパン，②A―メロンパン，③A―クロワッサン
④B―サンドウィッチ，⑤B―フランスパン，⑥B―あんパン
⑦C―メロンパン，⑧C―あんパン，⑨C―クリームパン

事象A:A店で買う，事象W:あんパンを買う
①の確率:（A店であんパンを買う確率:$P(W \cap A)$）
＝（A店が選ばれる確率:$P(A)$）
×（A店の中であんパンが選ばれる確率:$P(W|A)$）

$$P(W \cap A) = P(W|A)P(A)$$

条件によっては，①～⑨が全て同じ１／９とは限らない．

パン屋が選ばれる確率が異なる場合

（各パン屋におけるパンの種類は3種類であるとする）

（例）パン屋がＡ店：Ｂ店：Ｃ店＝１：２：３の割合で選ばれるとする.

Ａ店が選ばれる確率＝１／６

Ｂ店が選ばれる確率＝２／６＝１／３

Ｃ店が選ばれる確率＝３／６＝１／２

この場合は，例えば

①Ａ店のあんパンが買われる確率＝(1/6)x(1/3)=1/18

⑧Ｃ店のあんパンが買われる確率＝(1/2)x(1/3)=1/6

となり，「①～⑨が生じる確率は全て同じ1/9である」という前提条件は成り立たない.

一般には，次の場合に①の確率は1／9にならない．

- 3店のパンの種類が異なる場合

  $P(W|F) = 1/3$とは限らない

  例：パンの種類が4種類→$P(W|F) = 1/4$

- 各店が選ばれる確率が異なる場合

  $P(F) = 1/3$とは限らない

上記の2条件を考慮した確率（あんパンを買う確率）は次のように表される．

$$P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)$$

但し，$W \to$ あんパン，$A \to A$店，$B \to B$店，$C \to C$店

問題11＜ベイズの定理＞

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである.
A店　あんパン，メロンパン
B店　クロワッサン，フランスパン，あんパン，ジャムパン
C店　メロンパン，あんパン，クリームパン

＜ベイズの定理を用いて計算すること＞

1. ある人があんパンを買ったとき，それをA店で買った確率を求めよ.
2. ある人がメロンパンを買ったとき，それをC店で買った確率を求めよ.
3. ある人がフランスパンを買ったとき，それをB店で買った確率を求めよ.

＜条件１＞

３店が選ばれる確率は同じである.
各店において，ある種類のパンを買う確率は同じである.

- A店が選ばれる確率：$P(A) = 1/3$
- A店において，あんパンを買う確率：$P(W|A) = 1/2$
- A店であんパンを買う確率：

$$P(W \cap A) = P(W|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- B店であんパンを買う確率

$$P(W \cap B) = P(W|B)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

- C店であんパンを買う確率

$$P(W \cap C) = P(W|C)P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

- 全体として，あんパンを買う確率

$$P(W) = P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{36} = 0.36$$

- 全体として，メロンパンを買う確率

$$P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{36} = 0.28$$

＜条件２＞
各店において，ある種類のパンを買う確率は同じである.
ある店であるパンを買う確率は全て同じである.

この場合は，売っているパンの種類によって各店が選ばれる確率が異なることになる.

$$P(A) = \frac{2}{9}, \qquad P(B) = \frac{4}{9}, \qquad P(C) = \frac{3}{9}$$

- A店であんパンを買う確率

$$P(W \cap A) = P(W|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

- B店であんパンを買う確率

$$P(W \cap B) = P(W|B)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

条件２の場合は，

全体において，〇パンを買う確率
＝（〇パンを含む組合せの数）／（全ての組合せの数）

あんパンを買う確率

$$P(W) = \frac{3}{9}$$

メロンパンを買う確率

$$P(M) = \frac{2}{9}$$

クリームパンを買う確率

$$P(C) = \frac{1}{9}$$

各店におけるパンの種類が同じである場合は,
次の条件が同時に成り立つ.
(前回の演習問題がこれに該当する)

- 各店が選ばれる確率は同じである.

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

- 各店において,ある種類のパンを買う確率は同じである.

$$P(X|A) = P(Y|B) = P(W|C) = 1/3$$

- あるパンをある店で買う確率は同じである.

$$P(X|A)P(A) = P(Y|B)P(B) = P(W|C)P(C) = 1/9$$