情報数学

中山クラス
第１２週

＜今日の内容＞
◇第２回小テスト
◇第２章　４～５節

小テスト

◆試験時間：約40分

◆試験範囲：教科書「道具としてのベイズ統計」
第1章，第2章（2.1）

◆持ち込み：筆記用具，時計，学生証，ティッシュ

問題用紙，答案用紙

- 問題用紙：１枚，答案用紙：２枚
- 「はじめ」の合図があるまで問題用紙は伏せて下さい．
- 解答は答案用紙の表面に記入して下さい．紙面が不足する場合のみ裏面を使用して下さい．裏面は計算用紙として使用できます．
- 試験終了後，最後尾の席の学生が前のほうに回収して教員に渡してください．

試験に関する注意

◆横の席は一つ空けてください.

◆荷物はまとめて机の横に置いてください.
　教科書や資料が見えないようにしてください.

◆携帯電話はアラームを解除して，電源を切ってください.
　呼び出し音が鳴るのは試験妨害になります.
　切るための操作は不正行為の疑いがかかります.

不正行為について

不正行為と疑われそうなことはしないように.

- 他の学生から見えるように答案用紙を置かないこと.
- ポケットからテッシュやハンケチを出す場合は挙手して, 教員の許可を得ること.
- 鉛筆や消しゴムを落とした場合は自分で拾わず挙手すること.
- 鞄の中の教科書やノートの内容が見えないこと.
- 机の中に何も入れないこと. 自分のものでないものが入っている場合は, 一旦, 自分の鞄にしまい, 試験終了後に机の中に戻す.

４　ベイズ統計の例題　p.54

（例１）忘れ物の問題

Ｋ君･･･5回に1回の割合で帽子を忘れる.

お正月にA→B→Cを年始回りした.

年始回りの後で，帽子を忘れたことに気づいた．２軒目のBに忘れてきた確率を求めよ.

＜確率の定義で解く＞

年始回りを1000回したとする（確率計算のためにこのように考える）.

Ａで忘れる確率＝１／５→1000回中200回忘れる.

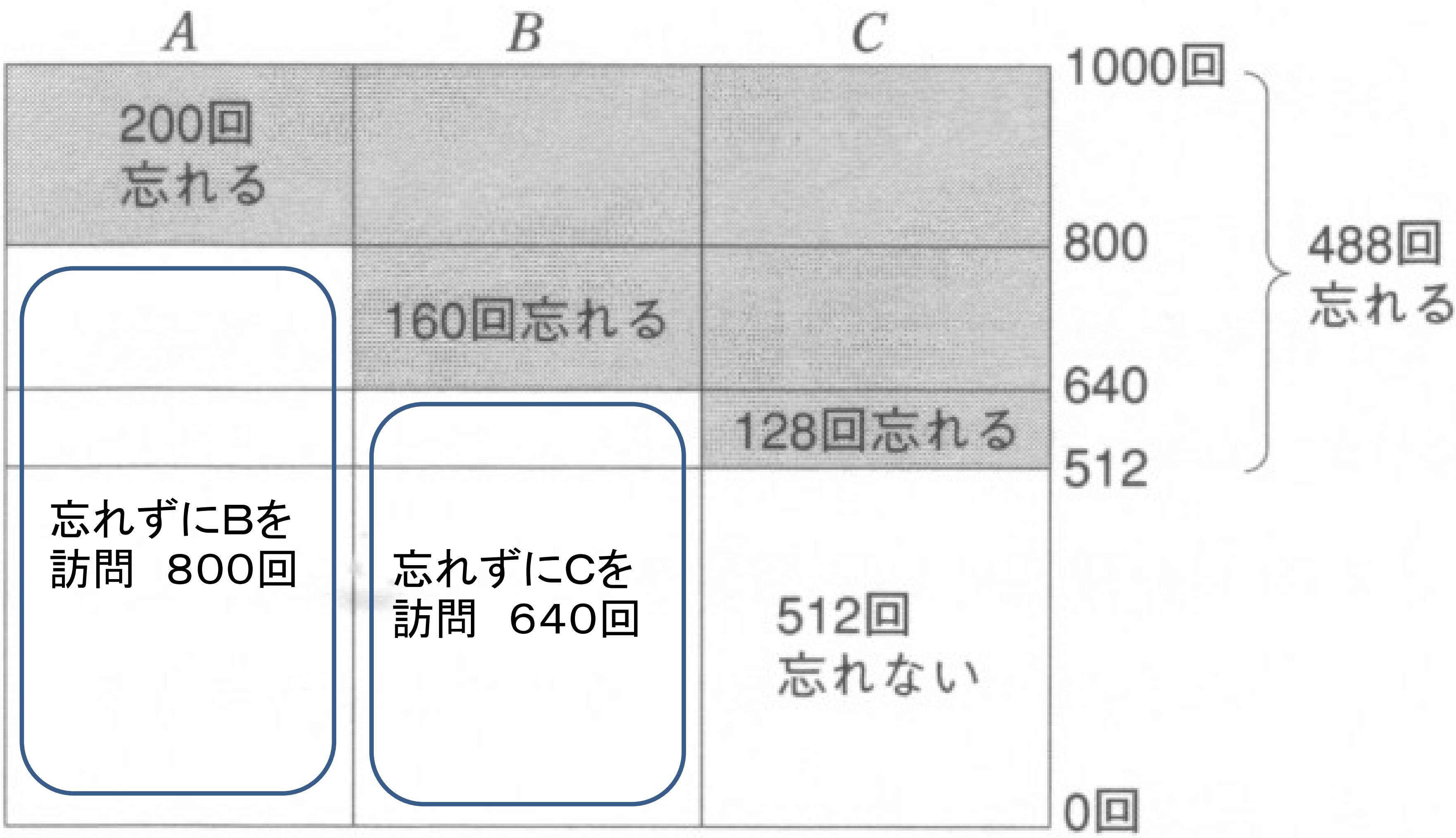
　　残り800回は忘れずにBを訪問

Ｂで忘れる確率＝１／５→800回中160回忘れる.

　　残り640回は忘れずにCを訪問

Ｃで忘れる確率＝１／５→640回中128回忘れる.

p.55


A
B
C
1000回
200回
忘れる
800
160回忘れる
640
128回忘れる
512
488回
忘れる
忘れずにBを
訪問　800回
忘れずにCを
訪問　640回
512回
忘れない
0回

以上より，１０００回中４８８回帽子を忘れて家に戻る．
４８８回中１６０回はＢで忘れる．

問題の条件より，「家に戻ったときに帽子を忘れていた」ので，全体の場合の数は488回，そのうち対象となる事象「Ｂで忘れた」回数は１６０回であるから，

Ｂで帽子を忘れた確率＝160/488＝20/61

＜ベイズの定理で解く＞ p.55

事象を決める

事象A： 家Aに入るとき帽子を持っている

事象B： 家Bに入るとき帽子を持っている

事象C： 家Cに入るとき帽子を持っている

排反事象

事象F： 家（A, B, C）で帽子を忘れる

求める確率 $P(B|F)$

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C)}$$

問題の条件より

$P(F|A) = P(F|B) = P(F|C) = 1/5$ 各家で忘れる確率

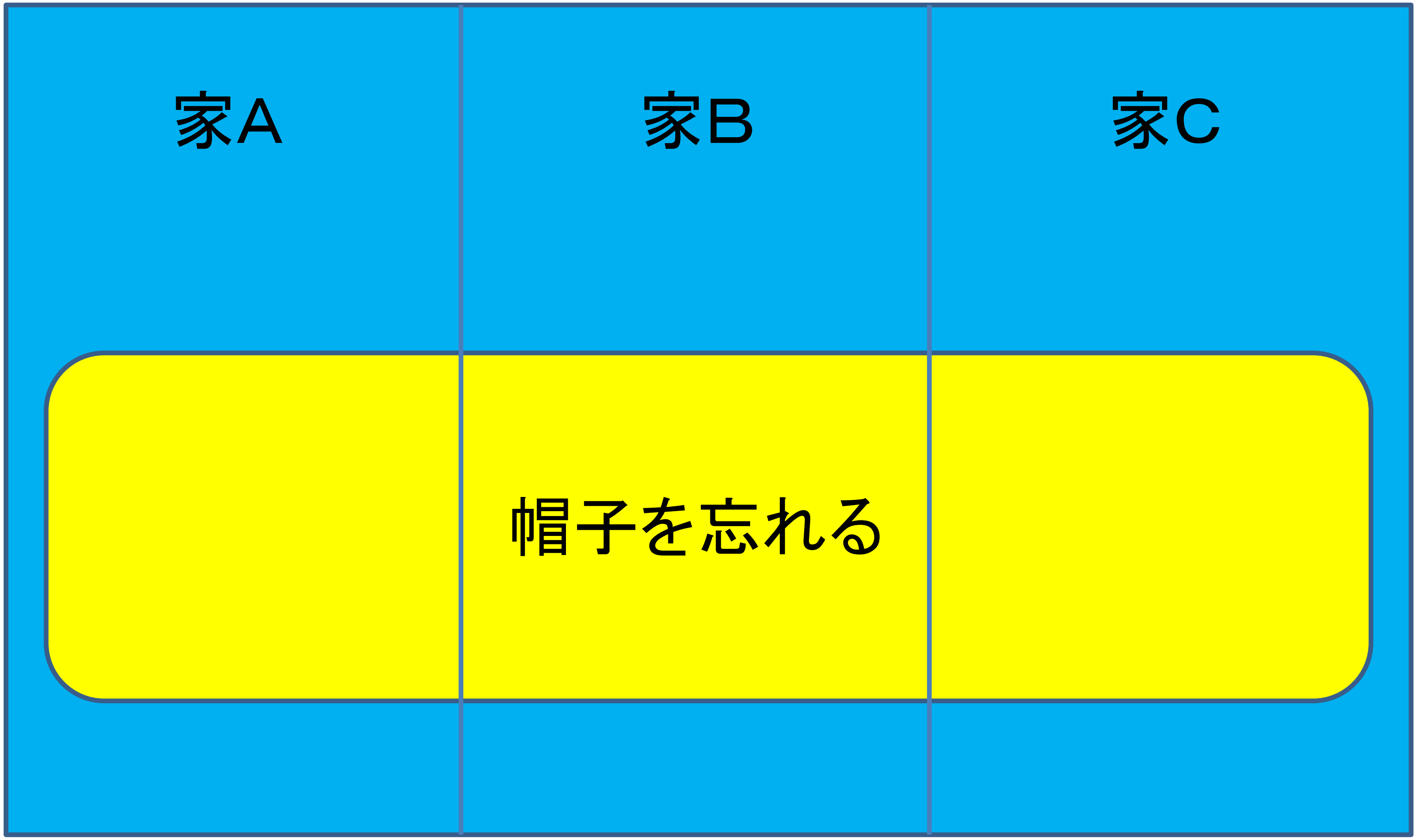
$P(A) = 1$ 家Aに入るときは必ず帽子を持っている.

$P(B) = 1 - 1/5 = 4/5$ 家Aで帽子を忘れていない.

$P(C) = (1 - 1/5)^2 = (4/5)^2$ 家A,Bで帽子を忘れていない.

これらの値を代入して，$P(B|F) = 20/61$

各家で帽子を忘れる事象は排反事象



（例2） p.56

ある病気を発見する検査法Tに関して，次のことが知られている.

- 病気の人にT法を適用→98％の確率で病気であると診断
- 病気でない人にT法を適用→5％の確率で病気であると診断
- 人全体の母集団：病気の人3％，病気でない人97％

母集団より無作為に選ばれた１人にT法を適用したとき，その人が病気であると診断されたとき，その人が本当に病気である確率を求めよ.

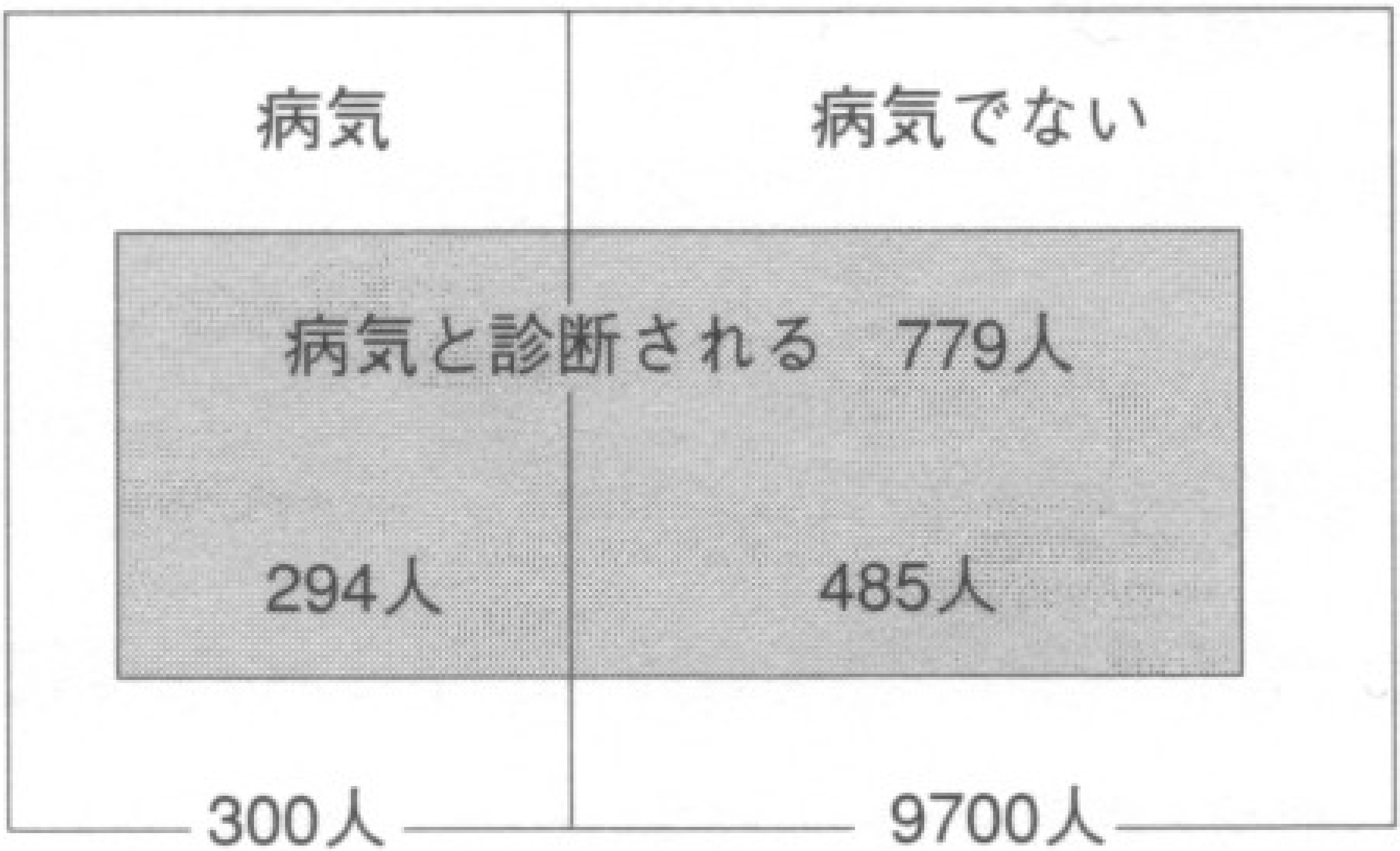
＜確率の定義で解く＞　p.57

母集団として10000人を考える（確率計算のため）
病気でない人＝10000×0.97＝9700人
病気の人＝10000×0.03＝300人
病気でない人を病気と診断＝9700×0.05＝485人
病気の人を病気と診断＝300×0.98＝294人
病気と診断される人＝485＋294＝779人

T法により，「病気と診断された人」のうち，「実際に病気である」確率

$$P = \frac{294}{779} \cong 38\%$$

p.57



＜ベイズの定理で解く＞

事象を決める

事象A　その人が病気である

事象$\bar{A}$　その人が病気でない

排反事象

事象B　その人が病気と診断される

求める確率　$P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

問題の条件より,

$$P(A) = 0.03, P(\bar{A}) = 0.97$$

$$P(B|A) = 0.98, \qquad P(B|\bar{A}) = 0.05$$

以上より,

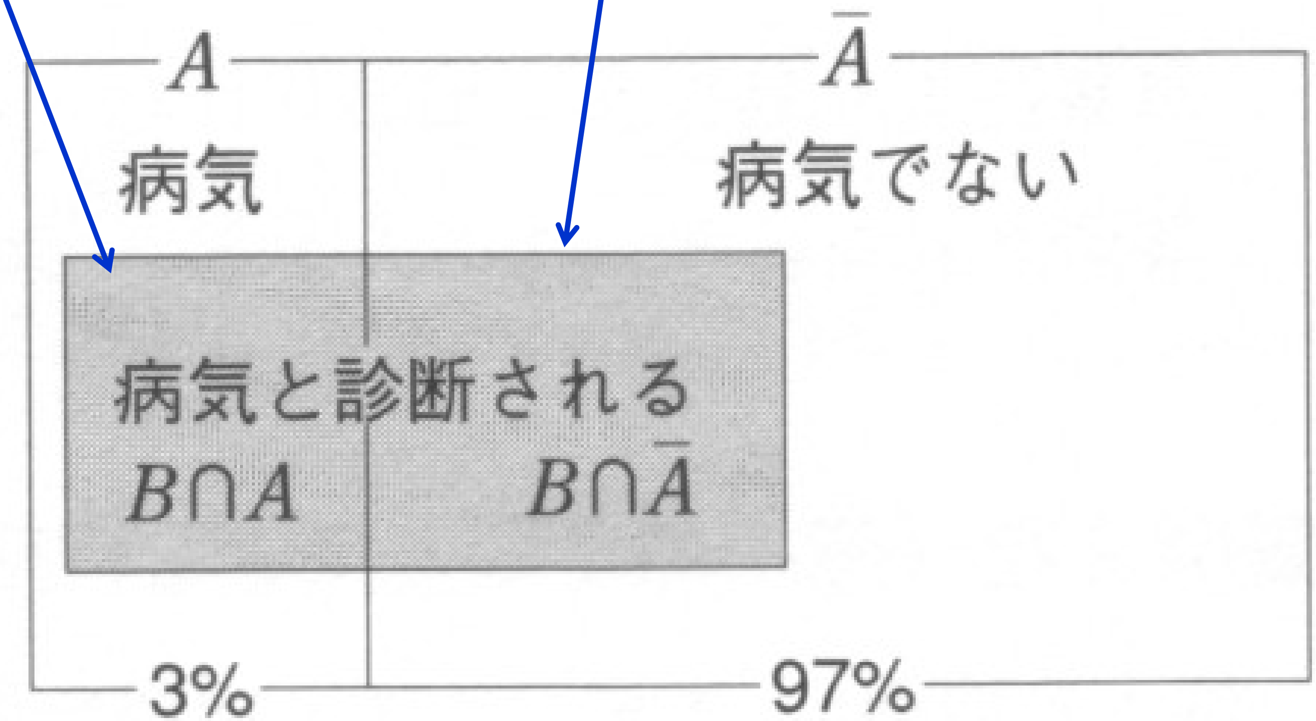
$$P(A|B) = \frac{294}{779} \cong 0.38$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

p.58



５　囚人の助かる確率　p.59

■　三囚人の問題

（例）

３人の死刑囚A，B，C

１人だけ無作為に選ばれ，恩赦を受ける.

恩赦になる囚人･･･看守は知っているが，囚人は知らない.

囚人Aが看守に「B，Cのうちどちらかは必ず処刑されるから，その人の名前を教えてほしい」と頼む．看守はもっともだと思って「囚人Bが処刑される」と教える.

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/3であった」が，情報を得てから「助かるのは自分かCなので，確率は1/2に上がった」と喜んだ.

囚人Aの計算は正しいか？

＜ベイズの定理による解法＞

事象を決める

事象A　Aが助かる
事象B　Bが助かる
事象C　Cが助かる

排反事象

事象S_B　看守が「Bが処刑される」とAに教える
事象S_C　看守が「Cが処刑される」とAに教える

求める確率　$P(A|S_B)$

$$P(A|S_B) = \frac{P(S_B|A)P(A)}{P(S_B|A)P(A) + P(S_B|B)P(B) + P(S_B|C)P(C)}$$

問題の条件より

恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

看守は嘘をつかない

$$P(S_B|B) = 0, P(S_B|C) = 1$$

Aが助かる場合，看守は「Bが処刑される」，「Cが処刑される」ことを等確率で教える．

$$P(S_B|A) = P(S_C|A) = 1/2$$

以上より，

$$P(A|S_B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

となり，囚人Aの計算は間違っている．

◆「囚人Bが処刑される」ことの確率的な任意性

囚人Aが助かる場合，看守は次の2通りを等確率で教えることが出来る.

「囚人Bが処刑される」･･･確率＝1/2

「囚人Cが処刑される」･･･確率＝1/2

①看守が「囚人Bが処刑」と教える→囚人Aの助かる確率

３人から処刑されるB，Cが選ばれる確率＝2/3

CではなくAが助かる確率＝1/2

Cではなく，「Bが処刑」と教える確率＝1/2

$$(2/3) \times (1/2) \times (1/2) = 1/6$$

②看守が「囚人Cが処刑」と教える→囚人Aが助かる確率

上の計算でBとCを交換→確率＝1/6

①と②の両方の可能性がある→$1/6 + 1/6 = 1/3$

モンティホール問題

「三囚人の問題」

新情報→確率は変わらない

囚人は新情報を得ても主体的な行動が出来ない.

新情報をもとに自分がアクションを起こせる場合

（例）

三つのドア（A，B，C）がある.

どれかに賞金が隠されている.

回答者が一つのドア（A）を選んだ.

出題者が残りのドアから，はずれのドア（C）を開けた.

回答者は①ドアAのままにする，②ドアBを選び直すという2通りを選択できる.

①，②のどちらが賞金を獲得する確率が高いか？

（ベイズの定理による解答）

事象の決め方

事象A　ドアAが当たり

事象B　ドアBが当たり

事象D　ドアCを開く

$\left.\begin{matrix}\text{事象A} \\ \text{事象B}\end{matrix}\right\}$ 排反事象

求める確率

$P(A|D), P(B|D)$　…　いずれが高くなるかを調べる

ベイズの定理より

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

問題の条件より,

$P(A)=P(B)=1/3$　情報がない状態では，三つのドアは同じ確率で1/3

$P(D|A)=1/2$　･･･　Aが当たりであれば，はずれはBかCなので，Cを開く確率は1/2

$P(D|B)=1$　･･･　Bが当たりであれば，Cは必ずはずれなので，Cを開く確率は1

以上を先ほどの式に代入

$$P(A|D)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$P(B|D)=\frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

結論

ドアAのまま＝1/3＜ドアBを選び直す＝2/3

参考

p.62