

情報数学

中山クラス 第12週

- <今日の内容>
 ◇第2回小テスト
 ◇第2章 4～5節

試験に関する注意

- ◆横の席は一つ空けてください。
- ◆荷物はまとめて机の横に置いてください。
教科書や資料が見えないようにしてください。
- ◆携帯電話はアラームを解除して、電源を切ってください。
呼び出し音が鳴るのは試験妨害になります。
切るための操作は不正行為の疑いがかかります。

小テスト

- ◆試験時間:約40分
- ◆試験範囲:教科書「道具としてのベイズ統計」
第1章, 第2章(2.1)
- ◆持ち込み:筆記用具, 時計, 学生証, ティッシュ

不正行為について

不正行為と疑われそうなことはしないように。

- ・他の学生から見えるように答案用紙を置かないこと。
- ・ポケットからティッシュやハンケチを出す場合は挙手して、教員の許可を得ること。
- ・鉛筆や消しゴムを落とした場合は自分で拾わず挙手すること。
- ・鞆の中の教科書やノートの内容が見えないこと。
- ・机の中に何も入れないこと。自分のものでないものが入っている場合は、一旦、自分の鞆にしまい、試験終了後に机の中に戻す。

問題用紙, 答案用紙

- ◆問題用紙:1枚, 答案用紙:2枚
- ◆「はじめ」の合図があるまで問題用紙は伏せて下さい。
- ◆解答は答案用紙の表面に記入して下さい。紙面が不足する場合のみ裏面を使用して下さい。裏面は計算用紙として使用できます。
- ◆試験終了後、最後尾の席の学生が前のほうに回収して教員に渡してください。

4 ベイズ統計の例題 p.54

(例1)忘れ物の問題

K君…5回に1回の割合で帽子を忘れる。

お正月にA→B→Cを年始回りした。

年始回りの後で、帽子を忘れたことに気づいた。2軒目のBに忘れてきた確率を求めよ。

<確率の定義で解く>

年始回りを1000回したとする(確率計算のためにこのように考える)。

Aで忘れる確率 = $1/5 \rightarrow 1000$ 回中200回忘れる。

残り800回は忘れずにBを訪問

Bで忘れる確率 = $1/5 \rightarrow 800$ 回中160回忘れる。

残り640回は忘れずにCを訪問

Cで忘れる確率 = $1/5 \rightarrow 640$ 回中128回忘れる。

p.55

A	B	C	
200回 忘れる			1000回
	160回忘れる		800
		128回忘れる	640
忘れずにBを 訪問 800回	忘れずにCを 訪問 640回		512
		512回 忘れない	0回

488回忘れる

各家で帽子を忘れる事象は排反事象



以上より, 1000回中488回帽子を忘れて家に戻る.
488回中160回はBで忘れる.

問題の条件より, 「家に戻ったときに帽子を忘れていた」
ので, 全体の場合の数は488回, そのうち対象となる事
象「Bで忘れた」回数は160回であるから,

Bで帽子を忘れた確率 = $160/488 = 20/61$

(例2) p.56

ある病気を発見する検査法Tに関して, 次のことが知ら
れている.

- 病気の人にT法を適用→98%の確率で病気であると
診断
- 病気でない人にT法を適用→5%の確率で病気であ
ると診断
- 人全体の母集団: 病気の人3%, 病気でない人97%

母集団より無作為に選ばれた1人にT法を適用したとき,
その人が病気であると診断されたとき, その人が本当に
病気である確率を求めよ.

<ベイズの定理で解く> p.55

事象を決める

- 事象A: 家Aに入るとき帽子を持っている
 - 事象B: 家Bに入るとき帽子を持っている
 - 事象C: 家Cに入るとき帽子を持っている
 - 事象F: 家(A, B, C)で帽子を忘れる
- 排反事象

求める確率 $P(B|F)$

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C)}$$

問題の条件より

$P(F|A) = P(F|B) = P(F|C) = 1/5$ 各家で忘れる確率
 $P(A) = 1$ 家Aに入るときは必ず帽子を持っている.
 $P(B) = 1 - 1/5 = 4/5$ 家Aで帽子を忘れていない.
 $P(C) = (1 - 1/5)^2 = (4/5)^2$ 家A,Bで帽子を忘れていない.
 これらの値を代入して, $P(B|F) = 20/61$

<確率の定義で解く> p.57

母集団として10000人を考える(確率計算のため)

病気でない人 = $10000 \times 0.97 = 9700$ 人病気の人 = $10000 \times 0.03 = 300$ 人病気でない人を病気と診断 = $9700 \times 0.05 = 485$ 人病気の人を病気と診断 = $300 \times 0.98 = 294$ 人病気と診断される人 = $485 + 294 = 779$ 人

T法により, 「病気と診断された人」のうち, 「実際に病気
である」確率

$$P = \frac{294}{779} \cong 38\%$$

p.57

病気	病気でない
病気と診断される 294人	779人 485人
300人	9700人

5 囚人の助かる確率 p.59

■ 三囚人の問題

(例)

3人の死刑囚A, B, C

1人だけ無作為に選ばれ、恩赦を受ける。

恩赦になる囚人…看守は知っているが、囚人は知らない。

囚人Aが看守に「B, Cのうちどちらかは必ず処刑されるから、その人の名前を教えてほしい」と頼む。看守はもつとだと思って「囚人Bが処刑される」と教える。

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/3であつた」が、情報を得てから「助かるのは自分かCなので、確率は1/2に上がった」と喜んだ。

囚人Aの計算は正しいか？

<ベイズの定理で解く>

事象を決める

事象A その人が病気である
 事象 $\bar{A}$ その人が病気でない
 事象B その人が病気と診断される

排反事象

求める確率 $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

問題の条件より、

$$P(A) = 0.03, P(\bar{A}) = 0.97$$

$$P(B|A) = 0.98, P(B|\bar{A}) = 0.05$$

以上より、

$$P(A|B) = \frac{294}{779} \cong 0.38$$

<ベイズの定理による解法>

事象を決める

事象A Aが助かる
 事象B Bが助かる
 事象C Cが助かる
 事象SB 看守が「Bが処刑される」とAに教える
 事象SC 看守が「Cが処刑される」とAに教える

排反事象

求める確率 $P(A|S_B)$

$$P(A|S_B) = \frac{P(S_B|A)P(A)}{P(S_B|A)P(A) + P(S_B|B)P(B) + P(S_B|C)P(C)}$$

p.58

A	$\bar{A}$
病気	病気でない
病気と診断される $B \cap A$	$B \cap \bar{A}$
3%	97%

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

問題の条件より

恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

看守は嘘をつかない

$$P(S_B|B) = 0, P(S_B|C) = 1$$

Aが助かる場合、看守は「Bが処刑される」、「Cが処刑される」ことを等確率で教える。

$$P(S_B|A) = P(S_C|A) = 1/2$$

以上より、

$$P(A|S_B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

となり、囚人Aの計算は間違っている。

◆「囚人Bが処刑される」ことの確率的な任意性

囚人Aが助かる場合、看守は次の2通りを等確率で教えることができる。

「囚人Bが処刑される」…確率=1/2

「囚人Cが処刑される」…確率=1/2

①看守が「囚人Bが処刑」と教える→囚人Aの助かる確率

3人から処刑されるB、Cが選ばれる確率=2/3

CではなくAが助かる確率=1/2

Cではなく、「Bが処刑」と教える確率=1/2

$$(2/3) \times (1/2) \times (1/2) = 1/6$$

②看守が「囚人Cが処刑」と教える→囚人Aが助かる確率

上の計算でBとCを交換→確率=1/6

①と②の両方の可能性があるので→ $1/6 + 1/6 = 1/3$

問題の条件より、

$P(A) = P(B) = 1/3$ 情報が無い状態では、三つのドアは同じ確率で1/3

$P(D|A) = 1/2$ … Aが当たりであれば、はずれはBかCなので、Cを開く確率は1/2

$P(D|B) = 1$ … Bが当たりであれば、Cは必ずはずれなので、Cを開く確率は1

以上を先ほどの式に代入

$$P(A|D) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|D) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

モンティホール問題

「三囚人の問題」

新情報→確率は変わらない

囚人は新情報を得ても主体的な行動が出来ない。

新情報をもとに自分がアクションを起こせる場合

(例)

三つのドア(A, B, C)がある。

どれかに賞金が隠されている。

回答者が一つのドア(A)を選んだ。

出題者が残りのドアから、はずれのドア(C)を開けた。

回答者は①ドアAのままにする、②ドアBを選び直すという2通りを選択できる。

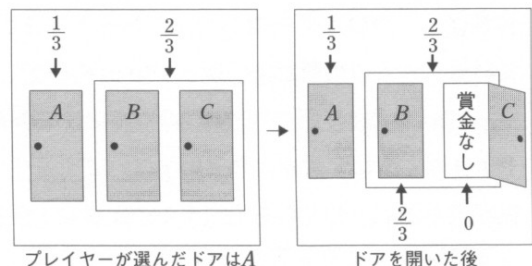
①、②のどちらが賞金を獲得する確率が高いか？

結論

ドアAのまま=1/3 < ドアBを選び直す=2/3

参考

p.62



(ベイズの定理による解答)

事象の決め方

事象A ドアAが当たり
事象B ドアBが当たり
事象D ドアCを開く

排反事象

求める確率

$P(A|D), P(B|D)$ … いずれが高くなるかを調べる

ベイズの定理より

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$