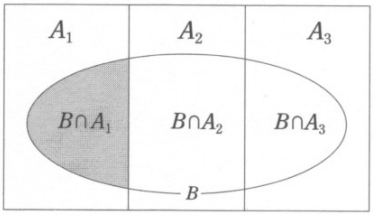
情報数学

中山クラス
第13週

＜今日の内容＞
◇小テストの解説
◇第3章　ベイズ統計学の基本
　1. ベイズ統計はシンプルな最強ツール
　2. ベイズ統計の基本公式
　3. コインの問題を考える
◇演習問題

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$



3章　ベイズ統計学の基本

- 統計モデルに含まれる母数（パラメータ）をベイズの定理に取り込む.
- ベイズ統計の基本を調べる.
- 母数が確率変数として扱われる.

■ベイズの定理の変形

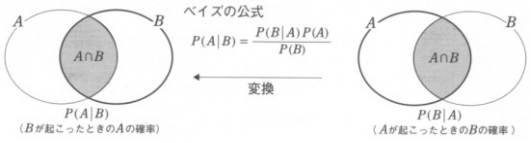
ベイスの定理において
A，B　確率現象の事象であればなんでも良い.

A：仮定に関する事象→原因→H（Hypothesis）
B：その結果に関する事象→データ→D（Data）

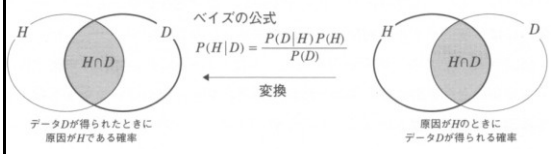
$$P(H|D)=\frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}$$

1　ベイズ統計はシンプルな最強ツール　p.76

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

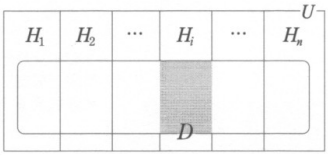


データDが得られた後に，その原因となる仮定Hが成立していた確率（原因の確率）を求める公式



仮定Hがいろいろある場合のベイズの公式
データDが得られた後に，その原因となる仮定がHiである確率を表す．

$$P(H_i|D)=\frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+\cdots+P(D|H_n)P(H_n)}$$



データDは仮定H_1、H_2、…、H_nのどれかが原因で得られるとする。

$P(D|H_i)$：3個中，赤玉がi個入った壺から赤玉を1個取り出す確率．
$P(D|H_1)=1/3, P(D|H_2)=2/3, P(D|H_3)=3/3$

$P(H_i)$：壺iが選ばれる確率（問題では与えられていない）
→「理由不十分の原則」に基づき等確率とする．
$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$

- 壺の選択に関して条件が与えられていれば，それを考慮することが出来る→ベイズ統計のメリット

上記の確率を用いて目的の確率分布が求まる（pp.80-81）．

赤玉の個数	1個	2個	3個
確率	$P(H_1\|D)=1/6$	$P(H_2\|D)=1/3$	$P(H_3\|D)=1/2$

確率の合計：$1/6+1/3+1/2=1$

■例題（壺の問題） p.79

（問題）
1個の壺がある．壺の中には白と赤の3個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（仮定／原因）の確率を求めよ．

＜解答例＞
仮定（原因）：壺の中の赤玉の個数＝1，2，3個
壺1[○○●]，壺2[○●●]，壺3[●●●]
H_k：壺kから玉1個取り出す．$k=1,2,3$
結果：取りだした玉が赤玉である．
D：壺から玉1個を取りだしたとき，それが赤玉である．

■尤度，事前確率，事後確率 p.81

$$P(H_i|D)=\frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3)}$$

$P(H_i)$：玉を取り出す前に壺が選ばれる確率→事前確率

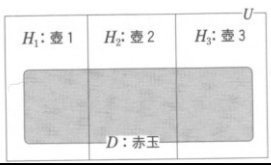
$P(H_i|D)$：赤玉が取り出された後に，それが壺iから取り出された確率→事後確率

$P(D|H_i)$：壺iが選択されたとき，そこから赤玉が取り出される確率→仮定H_iの尤度

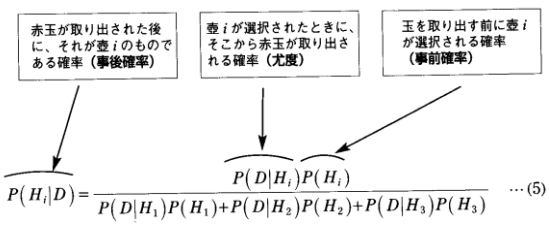
目標
赤玉が得られたとき，それが壺iから取り出された確率を全ての$i=1,2,3$について求める．

データDが得られたとき，その仮定がH_iである確率$P(H_i|D)$を全ての$i=1,2,3$について求める．

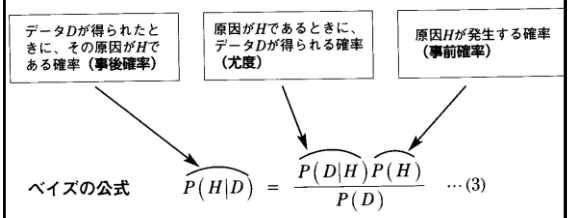
$$P(H_i|D)=\frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)+P(D|H_3)P(H_3)}$$



p.82



p.82



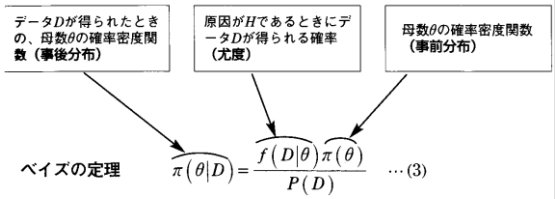
ベイズの定理

- θが離散的な値を取る場合

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)}$$

- θが連続的な値を取る場合

$$\pi(\theta|D) = \frac{f(D|\theta)\pi(\theta)}{P(D)}$$



2 ベイズ統計の基本公式 p.83

■母数（パラメータ）の導入

統計学では母数（パラメータ）を推定することが重要
母数の例
正規分布では「平均値μ」,「分散σ^2（標準偏差σ）」

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

★ベイズの定理で母数を推定
仮定H→「母数がθの値をとる」
文章としての仮定Hを数値としてのθと解釈する.

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)}$$

■さらにコンパクトに p.85

ベイズの定理において
$P(D)$：データDが得られる確率
ベイズ統計ではデータDが得られた後のことを考える.
母数の推定には直接影響しない.

$P(D)$を定数として扱う.

$$P(\theta|D) = kP(D|\theta)P(\theta)$$
$$\pi(\theta|D) = kf(D|\theta)\pi(\theta)$$

kは次の規格化条件より求まる.

$$\sum_{\theta=1}^{L} P(\theta|D) = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta|D)d\theta = 1$$

■母数が連続変数の場合のベイズの定理 p.84

確率変数が離散的な値を取る場合
$P(\theta|D), P(D|\theta), P(\theta)$は確率そのものを表す.

確率変数が連続的な値を取る場合
θがある値を取る確率は零である.
確率分布を表すもの＝確率密度関数
確率＝確率密度関数の積分

ベイズの定理においては，確率を確率分布と読み替える.

事前確率	$P(\theta)$	→	事前（確率）分布	$\pi(\theta)$
尤度	$P(D\|\theta)$	→	尤度	$f(D\|\theta)$
事後確率	$P(\theta\|D)$	→	事後（確率）分布	$\pi(\theta\|D)$

ベイズ統計の基本公式 p.86

比例定数kを明示するのが面倒な場合もある.
→比例関係で表現する.

ベイズ統計の基本公式
事後分布は尤度と事前分布の積に比例する.
事後分布$\pi(\theta|D) \propto$尤度$f(D|\theta)\times$事前分布$\pi(\theta)$

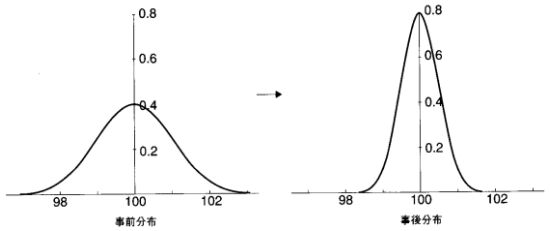
★ θ が複数の母数を表す場合にも基本公式を適用できる.

例題（製造ラインにおける平均値の分布）p.87

（問題）
- 菓子Aの製造ラインから作られる製品の重さの平均値μを調べる．
- 3個の製品を取りだしたところ，99g，100g，101gであった．
- これまでの検査によって，このラインから製造される製品の重さの分散は3であることが分かっている．
- また，昨年の経験から，平均値μは平均値100，分散1の正規分布に従っていると想像される．
- ◆ このとき，菓子Aの重さの平均値μの事後分布を求めよ．

平均値μの事前分布
去年の経験から，平均値100，分散1の正規分布に従うと想定された．

平均値μの事後分布
3個のデータを用いて，ベイズ統計解析することにより，平均値100，分散1/2の正規分布に従うことが分かった．
$\mu = 100$ の精度が高くなった．



＜解答例＞pp.87-88
同じ製造ラインで作られる製品の重さは正規分布になる場合が多い．この問題でも正規分布で考える．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

正規分布の母数：平均値μ（調べる対象），分散$\sigma^2 = 3$g

得られたデータD：3個の製品の重さ＝99g，100g，101g
これらのデータは正規分布（平均値μ，分散$\sigma^2 = 3$）に従う母集団から取り出されたものである．

尤度：$f(D|\mu) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(99-\mu)^2}{2\times 3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(100-\mu)^2}{2\times 3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(101-\mu)^2}{2\times 3}}$$

3　コインの問題　p.90

（問題）表の出る確率がθである1枚のコインがある．このコインを4回投げたとき，次のようになった．
1回目：表→2回目：表→3回目：裏→4回目：裏
（コインを投げることによって得られる結果／データ）
このとき，表の出る確率θの事後分布を求めよ．

＜解答例＞
対象となる母数：表の出る確率＝ θ

■尤度$f(D|\theta)$：「表の出る確率＝ θ」のもとでD（表／裏が出る）が起こる確率（条件付き確率）

$$f(\text{表}|\theta) = \theta$$
$$f(\text{裏}|\theta) = 1 - \theta$$

母数μの事前分布$\pi(\mu)$
去年の経験から平均値100，分散1の正規分布に従っていると仮定できる．

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-100)^2}{2}}$$

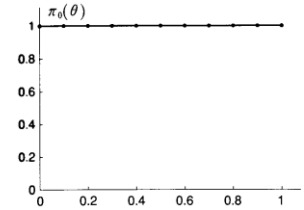
母数μの事後分布：$\pi(\mu|D)$

$$\pi(\mu|D) \propto f(D|\mu) \times \pi(\mu)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(99-\mu)^2}{2\times 3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(100-\mu)^2}{2\times 3}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 3}} e^{-\frac{(101-\mu)^2}{2\times 3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-100)^2}{2}}$$
$$\propto e^{-\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}(\mu-100)^2}$$

■事前分布：$\pi(\theta)$･･･確率密度関数　p.91
「表の出る確率」は$0 \le \theta \le 1$の範囲で考えられる．この範囲でθがどのように分布するかの事前情報はない．

「理由不十分の原則」に基づいて「一様分布」すると考える．

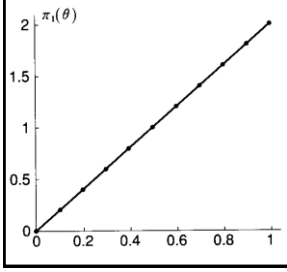
$$\pi_0(\theta) = 1, 0 \le \theta \le 1$$



コインを投げていない事前分布なので$\pi_0(\theta)$とする．

■「1回目に表が出た」というデータを取り込む

D_1：1回目に表が出る.
コインを1回投げた後のθの事後分布
$\pi(\theta|D_1) \propto f(D_1|\theta) \times \pi_0(\theta) = \theta \times 1 = \theta$



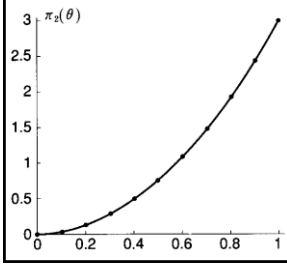
規格化条件（面積＝1）より,
$\pi_1(\theta) = \pi(\theta|D_1) = 2\theta$

コインを投げる前
情報がないので「一様分布」

コインを1回投げた後
表が出たので,「表が出やすい分布」に更新された.

■「2回目に表が出た」というデータを取り込む

D_2：2回目に表が出る.
コインを2回投げた後のθの事後分布
$\pi(\theta|D_2) \propto f(D_2|\theta) \times \pi_1(\theta) = \theta \times 2\theta = 2\theta^2$



規格化条件（面積＝1）より,
$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 3\theta^2$

コインを1回投げた後
表が出たので,「表が出やすい分布= 2θ」に更新された.

コインを2回投げた後
表が出たので,「さらに表の出やすい分布= $3\theta^2$」に更新された.

■「3回目に裏が出た」というデータを取り込む

D_3：3回目に裏が出る.

3回目に対する事前分布：$\pi_2(\theta) = 3\theta^2$
3回目に対する尤度：$f(D_3|\theta) = 1 - \theta$

コインを3回投げた後のθの事後分布
$\pi(\theta|D_3) \propto f(D_3|\theta) \times \pi_2(\theta) = (1-\theta) \times 3\theta^2$

規格化条件（面積=1）より,
$\pi_3(\theta) = \pi(\theta|D_3) = 12(1-\theta)\theta^2$

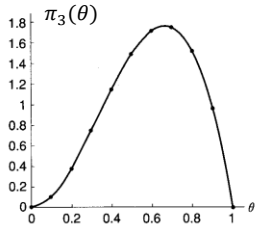
■「4回目に裏が出た」というデータを取り込む

D_4：4回目に裏が出る.

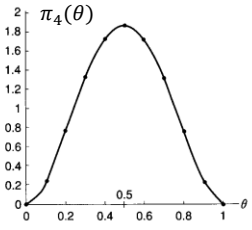
4回目に対する事前分布：$\pi_3(\theta) = 12(1-\theta)\theta^2$
4回目に対する尤度：$f(D_4|\theta) = 1 - \theta$

コインを3回投げた後のθの事後分布
$\pi(\theta|D_4) \propto f(D_4|\theta) \times \pi_3(\theta) = (1-\theta) \times 12(1-\theta)\theta^2$

規格化条件（面積=1）より,
$\pi_4(\theta) = \pi(\theta|D_4) = 30(1-\theta)^2\theta^2$



3回目では裏が出たため,
$\theta = 1$（必ず表が出る）に対する事後分布は零になっている. しかし, まだ$\theta = 0.7$付近にピークがある. すなわち, 表が出やすい分布になっている.



4回目で, 再び裏が出たため,
$0.5 < \theta$（表が出やすい）に対する事後分布が小さくなっている.
表2回, 裏2回となったため,
$\theta = 0.5$付近がピークとなり, 表と裏の出やすさが均衡している.

ベイズ更新

データをつけ加えるごとに, 母数θの確率分布が更新される･･･ベイズ統計の大きな特徴

新たなデータが加わったとき, はじめから統計解析をなり直す必要がなく, これまでの解析結果に新たなデータを追加する形で統計解析を更新できる.

■ベイズ推定　p.94

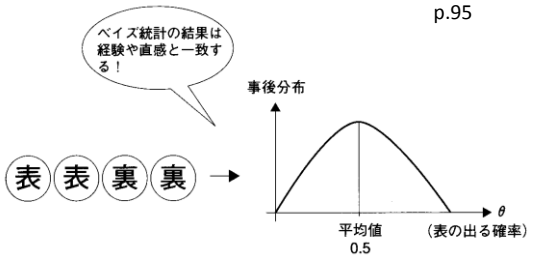
ベイズ推定：事後分布から母数を推定する.

$\pi_4(\theta)$を利用して，θの平均値を推定する.
グラフが$\theta = 0.5$を中心にして左右対称であることから，

$$\theta = 0.5$$

が平均値である.

p.95



演習問題

1個の壺がある．壺の中には白と赤の2個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（原因／仮定）に対する確率を求めよ.