情報数学

中山クラス

第２週

2.4　組合せ

組合せ：　n個の異なるものからなる集団からr個のものを取り出すこと.
取り出されたr個のものからなる部分集団

選び方：　$C(n,r)$　or　${}_nC_r$　or　$\binom{n}{r}$

定理2.2

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} $$

(例題による証明)

４個の異なるa, b, c, dから３個選ぶ順列を考える.

$$abc, abd, acb, acd, adb, adc$$
$$bac, bad, bca, bcd, bda, bdc$$
$$cab, cad, cba, cbd, cda, cdb$$
$$dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$$

この中でa, b, cからなる順列は次の６通り

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

６通り＝a, b, cから３個選ぶ順列の数　${}_3P_3$

組合せではこの６個の順列は全て同じものである.

（証明の続き）

a, b, c, dから3個選ぶ組合せ$(={}_4C_3)$は次の4通りである.

$$abc, abd, acd, bcd$$

各組合せに対して　${}_3P_3$個の順列が可能であるから，4個から3個を選ぶ順列　${}_nP_r$の数は次のように表される.

$${}_4C_3 \times {}_3P_3 = {}_4P_3$$

これより,

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{{}_3P_3} \to \quad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}$$

例2.7

果物店： リンゴ，ミカン，ブドウ，メロン，バナナ（5種類）

（問）3種類の果物を買う方法は何通りあるか？

（答）5種類の異なるものから3種類を選ぶ組合せ問題であるから

$$ {}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 $$

例2.8

正n角形の対角線の数を求める

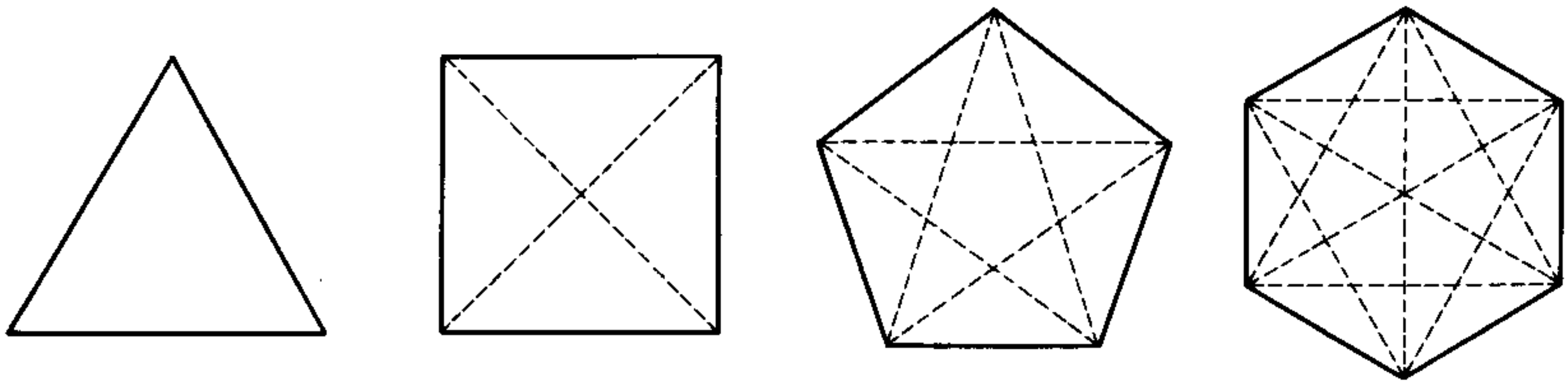


図 2.2　多角形の対角線

- 対角線:異なる2つの頂点を結ぶ線
- 対角線の数→n個の異なる頂点から2個の頂点を選ぶ組合せの数($={}_n C_2$)
- しかし, 上記にはn個の辺(≠対角線)も含まれる.

◆ 対角線の数＝　${}_nC_2 - n$

具体例

正三角形 $\quad {}_3C_2 - 3 = 3 - 3 = 0$

正方形 $\quad {}_4C_2 - 4 = 6 - 4 = 2$

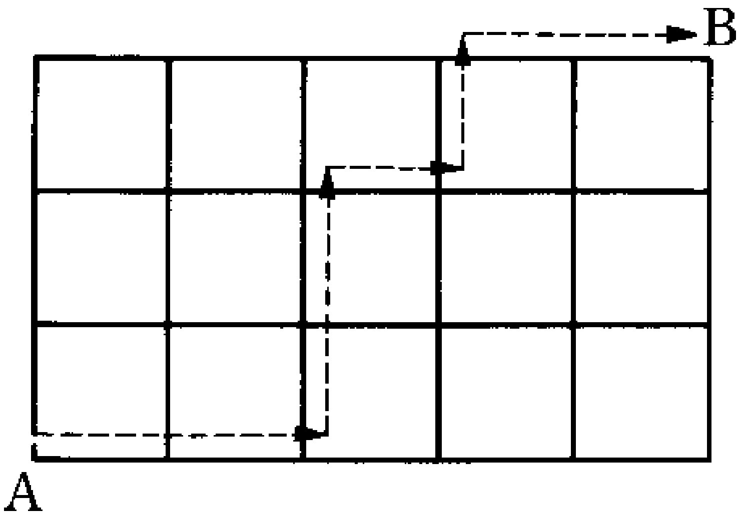
正五角形 $\quad {}_5C_2 - 5 = 10 - 5 = 5$

正六角形 $\quad {}_6C_2 - 6 = 15 - 6 = 9$

例2.9

Ａ点からＢ点まで行く方法は何通りあるか？

＜条件＞進める方向は東（右）方向と北（上）方向のみ



右図は1つの経路（→→↑↑→↑→→）を表している.

経路は→が5個，↑が3個（合計8個）からなる．↑に着目すると，８箇所のうち，３箇所に↑が入る

従って，８箇所から3箇所を選ぶ組合せの数だけ経路がある．同様に，８箇所から5箇所を選ぶ組合せの数だけ経路がある.

$${}_8C_3 = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = \qquad {}_8C_5 = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 56$$

特定のものを選ばない／選ぶ組合せ

◆n個の異なるものからr個を選ぶ組合せにおいて，ある特定のものをk個選ばない組合せ

→$n-k$個の異なるものからr個を選ぶ組合せ

$$ {}_{n-k}C_r, \qquad n-k \geq r $$

◆n個の異なるものからr個を選ぶ組合せにおいて，ある特定のものk個を必ず選ぶ組合せ

→$n-k$個の異なるものから$r-k$個を選ぶ組合せ

$$ {}_{n-k}C_{r-k}, r-k \geq 0 $$

2.5 順列組合せに関する関係式

階乗について

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

$$0! = 1$$

階乗による表現

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

定理2.3

$$ {}_{n}P_{r} = {}_{n-1}P_{r} + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}, \qquad (n \geq 2, 1 \leq r < n) $$

(証明)

関係式 ${}_{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ を用いて，次のように直接証明できる。

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}P_{r} + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{(n-r)!} + \frac{(n-1)! \cdot r}{(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \\
&= {}_{n}P_{r}
\end{aligned}
$$

別の証明

①n個のうち一つに目印をつける.

②目印の付いていない$n-1$個からr個選ぶ順列

$${}_{n-1}P_r$$

③目印の付いているものを必ず含む順列

1)目印の付いていない$n-1$個から$r-1$個を選ぶ順列

$${}_{n-1}P_{r-1}$$

2)この順列に目印の付いているものを追加する. 挿入箇所は図2.5に示すようにr個である.

3)順列の数$= r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$

④全体の順列＝②＋③

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$$

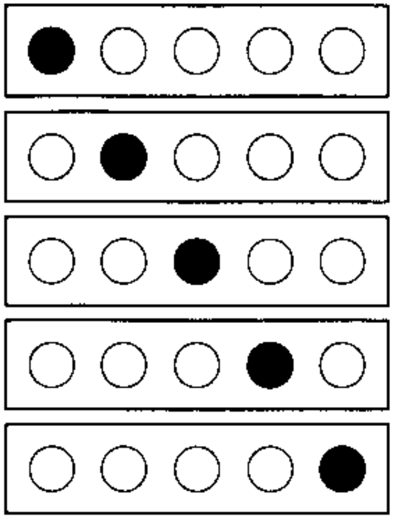


図 2.5　目印付きの物の挿入位置

定理2.4

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} $$

(証明)

関係式 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ を用いて，次のように直接証明できる。

$$
\begin{aligned}
{}_nC_{n-r} &= \frac{n!}{\{n-(n-r)\}! \cdot (n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \\
&= {}_nC_r
\end{aligned}
$$

別の証明

- 異なるn個のものからr個を選ぶ組合せ→${}_n C_r$
- 異なるn個のものから$n-r$個を選ばない→${}_n C_{n-r}$

◆「選ぶ」と「選ばない」は組合せの選択方法としては同じである.

$$ {}_nC_r = {}_n C_{n-r} $$

（例）８個から３個を選ぶ組合せ
　　＝８個から５個を選ばない組合せ

演習問題

果物店：リンゴ，ミカン，ブドウ，メロン，バナナ，柿
パン屋：メロンパン，あんパン，クロワッサン

（１）果物店で3種類の果物を買う方法は何通りあるか？
（２）（１）において，ブドウを買わない方法は何通りあるか？
（３）（１）において，ミカンを必ず買う方法は何通りあるか？
（４）果物店で果物を2種類，パン屋でパンを2種類，同時に買う方法は何通りあるか？
（５）（４）の問題でメロンとメロンパンは同時に買わない方法は何通りあるか？

＜（５）に対するヒント）
①メロンを含まない組合せ/②メロンを含む組合せ
③メロンパンを含まない組合せ/④メロンパンを含む組合せ
買い方（その１）＝①×③＋①×④＋②×③
買い方（その２）＝全体の組合せ［（４）に相当］―②×④