

情報数学

中山クラス

第2週

3

(例題による証明)

4個の異なる a, b, c, d から3個選ぶ順列を考える.

$abc, abd, acb, acd, adb, adc$

$bac, bad, bca, bcd, bda, bdc$

$cab, cad, cba, cbd, cda, cdb$

$dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$

この中で a, b, c からなる順列は次の6通り

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

6通り= a, b, c から3個選ぶ順列の数 ${}_3P_3$

組合せではこの6個の順列は全て同じものである.

4

2.4 組合せ

組合せ: n 個の異なるものからなる集団から r 個のものを取り出すこと.

取り出された r 個のものからなる部分集団

選び方: $C(n, r)$ or ${}_nC_r$ or $\binom{n}{r}$

2

(証明の続き)

a, b, c, d から3個選ぶ組合せ(${}_4C_3$)は次の4通りである.

abc, abd, acd, bcd

各組合せに対して ${}_3P_3$ 個の順列が可能であるから, 4個から3個を選ぶ順列 ${}_nP_r$ の数は次のように表される.

$${}_4C_3 \times {}_3P_3 = {}_4P_3$$

これより,

$${}_4C_3 = \frac{{}_4P_3}{{}_3P_3} \rightarrow {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r}$$

5

定理2.2

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{{}_rP_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

3

例2.7

果物店: リンゴ, ミカン, ブドウ, メロン, パナナ (5種類)

(問) 3種類の果物を買う方法は何通りあるか?

(答) 5種類の異なるものから3種類を選ぶ組合せ問題であるから

$${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

6

例2.8

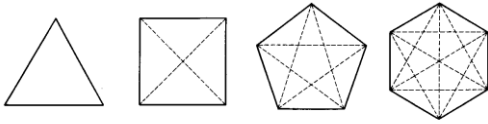
正 n 角形の対角線の数を求める

図 2.2 多角形の対角線

- 対角線:異なる2つの頂点を結ぶ線
- 対角線の数 $\rightarrow n$ 個の異なる頂点から2個の頂点を選ぶ組合せの数($= {}_n C_2$)
- しかし, 上記には n 個の辺($\neq$ 対角線)も含まれる.
- ◆ 対角線の数 $= {}_n C_2 - n$

7

特定のものを選ばない／選ぶ組合せ

- ◆ n 個の異なるものから r 個を選ぶ組合せにおいて, ある特定のものを k 個選ばない組合せ

 $\rightarrow n - k$ 個の異なるものから r 個を選ぶ組合せ

$${}_{n-k} C_r, \quad n - k \geq r$$

- ◆ n 個の異なるものから r 個を選ぶ組合せにおいて, ある特定のものを k 個を必ず選ぶ組合せ

 $\rightarrow n - k$ 個の異なるものから $r - k$ 個を選ぶ組合せ

$${}_{n-k} C_{r-k}, \quad r - k \geq 0$$

10

具体例

正三角形 ${}_3 C_2 - 3 = 3 - 3 = 0$

正方形 ${}_4 C_2 - 4 = 6 - 4 = 2$

正五角形 ${}_5 C_2 - 5 = 10 - 5 = 5$

正六角形 ${}_6 C_2 - 6 = 15 - 6 = 9$

8

2.5 順列組合せに関する関係式

階乗について

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$0! = 1$$

階乗による表現

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

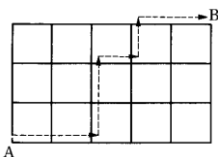
$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

11

例2.9

A点からB点まで行く方法は何通りあるか?

<条件>進める方向は東(右)方向と北(上)方向のみ

右図は1つの経路($\rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \uparrow$)を表している.経路は $\rightarrow$ が5個, $\uparrow$ が3個(合計8個)からなる. $\uparrow$ に着目すると, 8箇所のうち, 3箇所に $\uparrow$ が入る

従って, 8箇所から3箇所を選ぶ組合せの数だけ経路がある. 同様に, 8箇所から5箇所を選ぶ組合せの数だけ経路がある.

$${}_8 C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = {}_8 C_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

9

定理2.3

$${}_n P_r = {}_{n-1} P_r + r \cdot {}_{n-1} P_{r-1}, \quad (n \geq 2, 1 \leq r < n)$$

(証明)

関係式 ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ を用いて, 次のように直接証明できる.

$$\begin{aligned} {}_{n-1} P_r + r \cdot {}_{n-1} P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (n-r)}{(n-r)!} + \frac{(n-1)! \cdot r}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= {}_n P_r \end{aligned}$$

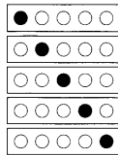
12

別の証明

- ① n 個のうち一つに目印をつける。
 ② 目印の付いていない $n-1$ 個から r 個選ぶ順列

$${}^{n-1}P_r$$
 ③ 目印の付いているものを必ず含む順列
 1) 目印の付いていない $n-1$ 個から $r-1$ 個を選ぶ順列

$${}^{n-1}P_{r-1}$$
 2) この順列に目印の付いているものを追加する。挿入箇所は図2.5に示すように r 個である。
 3) 順列の数 $= r \cdot {}^{n-1}P_{r-1}$



- ④ 全体の順列 $=$ ② $+$ ③

$${}_n P_r = {}^{n-1} P_r + r \cdot {}^{n-1} P_{r-1}$$

図 2.5 目印付きの物の挿入位置

13

演習問題

果物店: リンゴ, ミカン, ブドウ, メロン, パナナ, 柿
 パン屋: メロンパン, あんパン, クロワッサン

- (1) 果物店で3種類の果物を買う方法は何通りあるか?
 (2) (1)において, ブドウを買わない方法は何通りあるか?
 (3) (1)において, ミカンを必ず買う方法は何通りあるか?
 (4) 果物店で果物を2種類, パン屋でパンを2種類, 同時に買う方法は何通りあるか?
 (5) (4)の問題でメロンとメロンパンは同時に買わない方法は何通りあるか?

<(5)に対するヒント>

- ① メロンを含まない組合せ / ② メロンを含む組合せ
 ③ メロンパンを含まない組合せ / ④ メロンパンを含む組合せ
 買い方(その1) $=$ ① $\times$ ③ $+$ ① $\times$ ④ $+$ ② $\times$ ③
 買い方(その2) $=$ 全体の組合せ [(4) に相当] $-$ ② $\times$ ④ ¹⁶

定理2.4

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$$

(証明)

関係式 ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ を用いて, 次のように直接証明できる。

$$\begin{aligned} {}_n C_{n-r} &= \frac{n!}{\{n - (n-r)\}! \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \\ &= {}_n C_r \end{aligned}$$

14

別の証明

- 異なる n 個のもののから r 個を選ぶ組合せ $\rightarrow {}_n C_r$
 ➤ 異なる n 個のもののから $n-r$ 個を選ばない $\rightarrow {}_n C_{n-r}$
 ◆ 「選ぶ」と「選ばない」は組合せの選択方法としては同じである。

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$$

- (例) 8個から3個を選ぶ組合せ
 $=$ 8個から5個を選ばない組合せ

15