

情報数学

中山クラス 第3週

<内容>

第2章

2. 5 順列・組合せに関する関係式

定理2. 5～

2. 6 重複順列

2. 7 重複組合せ

演習問題

定理2.5

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \\ {}_nC_0 &= 1, \quad {}_nC_n = 1 \end{aligned}$$

(証明)

関係式 ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ により

$${}_{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \cdot r!}$$

$${}_{n-1}C_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!}$$

となるので, これらの和を計算すると

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! \cdot r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-r)}{(n-r)! \cdot r! \cdot n} + \frac{n! \cdot r}{(n-r)! \cdot r! \cdot n} \\ &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \\ &= {}_nC_r \end{aligned}$$

別の証明

①異なる n 個のもののから r 個選ぶ組合せ = ${}_nC_r$

n 個のうち一つに目印をつける(ある特定のものを指定).

②目印付きのものを選ばない組合せ

→ $n - 1$ 個のもののから r 個を選ぶ組合せ = ${}_{n-1}C_r$

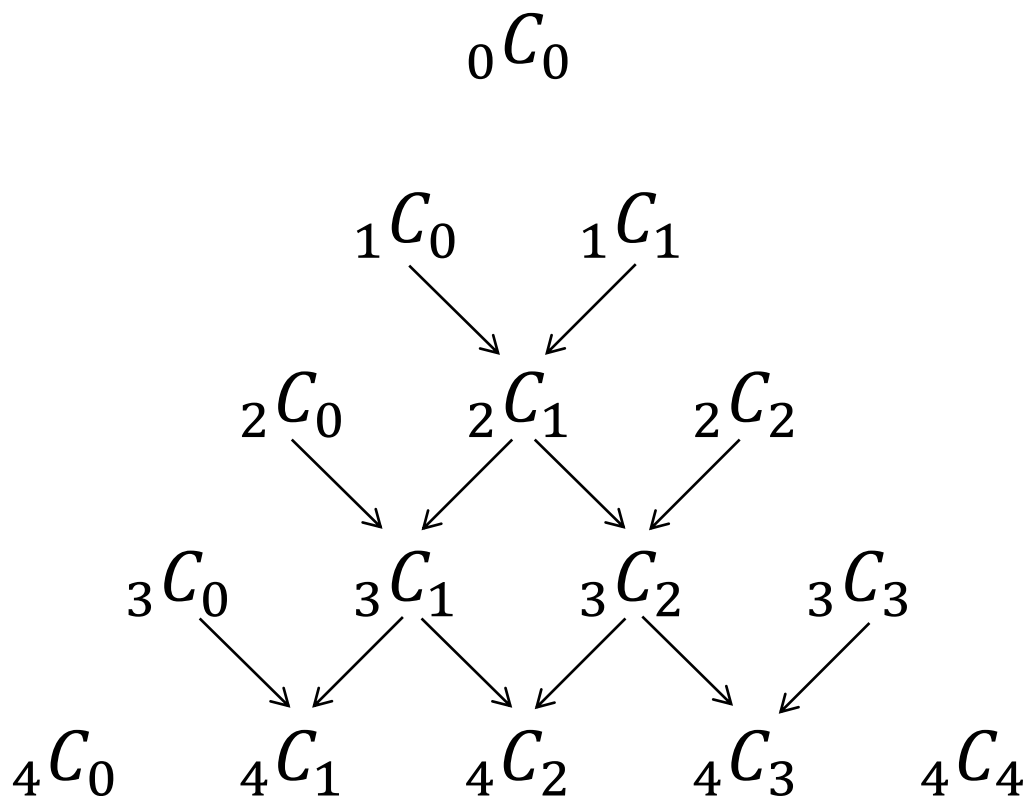
③目印付きのものを必ず選ぶ組合せ

→ $n - 1$ 個のもののから $r - 1$ 個を選ぶ組合せ = ${}_{n-1}C_{r-1}$

①は②と③を含み, かつ, ②と③は同時に起こらないので, 和法則により① = ② + ③となる.

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$$

パスカルの三角形(定理2.5より)



${}_nC_r$: 上から n 番目, 左から r 番目に位置する.

左側: ${}_nC_0 = 1$, 右側: ${}_nC_n = 1$

内部にある ${}_nC_r = \text{左上} + \text{右上}$

パスカルの三角形(例)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

定理2.6

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r}C_0$$

(証明) 定理2. 5を繰り返し適用する.

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$$

$$= {}_nC_r + ({}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r-2})$$

$$= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + ({}_{n-2}C_{r-2} + {}_{n-2}C_{r-3})$$

$\vdots$

$$= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + {}_{n-r+1}C_0$$

$$= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + 1$$

$$= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + {}_{n-r}C_0$$

別の証明

[1]を除く組合せ・・・① [1]X

[1]を含める ...②

 [2]を除く組合せ・・・②-a [1]O,[2]X

 [2]を含める ...②-b

 [3]を除く組合せ ...②-b-1 [1],[2]O,[3]X

 [3]を含める組合せ・・・②-b-2 [1],[2],[3]O

全体の組合せ＝①＋②-a＋②-b-1＋②-b-2

< $n = 7, r = 3$ の例題 >

◆ [1][2][3][4][5][6][7][8] の $7 + 1 = 8$ 個から 3 個選ぶ

$$\rightarrow {}_{n+1}C_r = {}_8C_3$$

① [1] を除く [2][3][4][5][6][7][8] の 7 個から 3 個選ぶ

$$\rightarrow {}_nC_r = {}_7C_3 \quad \text{集団から 1 を引く}$$

② [1] を必ず含める (集団 & 組合せから 1 を引く)

[2] を除く [3][4][5][6][7][8] の 6 個から 2 個選ぶ

$$\rightarrow {}_{n-1}C_{r-1} = {}_6C_2 \quad \text{さらに集団から 1 を引く}$$

③ [1][2] を必ず含める (集団 & 組合せから 2 を引く)

[3] を除く [4][5][6][7][8] の 5 個から 1 個選ぶ

$$\rightarrow {}_{n-2}C_{r-2} = {}_5C_1 \quad \text{さらに集団から 1 を引く}$$

④ [1][2][3] を必ず含める (集団 & 組合せから 3 を引く)

[4][5][6][7][8] の 5 個から 0 個選ぶ

$$\rightarrow {}_{n-r}C_{r-r} = {}_{n-r}C_0 = {}_4C_0$$

$$\text{◆} = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

一般的な表現

異なる $n + 1$ 個のものの内, 任意の r 個に $[1],[2],[3],\dots,[r]$ の印をつける.

① $[1]$ 以外の n 個から r 個を選ぶ組合せ $\rightarrow {}_nC_r$

② $[1]$ を必ず含み, $[2]$ を除く組合せ

$\rightarrow n - 1$ 個から $r - 1$ 個を選ぶ組合せ $\rightarrow {}_{n-1}C_{r-1}$

集団から $[1],[2]$ を除く $\rightarrow n + 1 - 2 = n - 1$

組合せから $[1]$ を除く $\rightarrow r - 1$

③ $[1],[2]$ を必ず含み, $[3]$ を除く組合せ $\rightarrow n - 2$ 個から $r - 2$ 個を選ぶ組合せ $\rightarrow {}_{n-2}C_{r-2}$

集団から $[1],[2],[3]$ を除く $\rightarrow n + 1 - 3 = n - 2$

組合せか $[1],[2]$ を除く $\rightarrow r - 2$

◆ $[1],[2],[3],\dots,[r]$ を必ず含むまで繰り返す.

全体の組合せ $=$ ① $+$ ② $+$ ③ $+$

2.6 重複順列

重複順列： 同じものを繰り返し使用することを許して作られる順列

n 個の異なるものからなる集団から r 個を取り出して順列を作るが、その際に、同じものを複数回取り出すことを許す. 「 n 個の異なるもの」→「 n 種の異なる」

(例) 電話番号: 10種の異なる数字(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)から重複を許して10個取り出して順列を作る.

${}_n\Pi_r$: n 種の異なるものから重複を許して r 個とって作ることができる順列の数

定理2.7

$$\begin{aligned}{}_n\Pi_r &= n \cdot {}_n\Pi_{r-1} \\ {}_n\Pi_0 &= 1, \quad {}_n\Pi_1 = n\end{aligned}$$

(証明)

- ① n 種の異なるものから, まず1個をとる $\rightarrow n$ 通り
- ② ①の後に, n 種の異なるものから $r-1$ 個とって重複順列を作る方法は ${}_n\Pi_{r-1}$
この場合, 最初の1個に関係なく n 種が全て使用できる.
- ③ 全体の重複順列: ${}_n\Pi_r$
①に対して ${}_n\Pi_{r-1}$ だけの重複順列があり, ①は n 通りあるから

$${}_n\Pi_r = n \cdot {}_n\Pi_{r-1}$$

定理2.8

$${}_n\Pi_r = n^r$$

(証明)

定理 2.7 の関係式を繰り返し用いることにより,

$$\begin{aligned} {}_n\Pi_r &= n \cdot {}_n\Pi_{r-1} = n^2 \cdot {}_n\Pi_{r-2} = \cdots \\ &= n^r \cdot {}_n\Pi_0 \\ &= n^r \end{aligned}$$

例2.10

電話番号＝市内局番3けた＋番号4けた＝7けた
利用可能な電話番号：10種の異なる数字から7個を
とってできる重複順列の数

$${}_{10}\Pi_7 = 10^7 \text{ 通り}$$

ただし、先頭の数字が0, 1の局番は使用しない.

- ①先頭の数字は2～9の8通り
- ②先頭の数字1つに対して ${}_{10}\Pi_6$ 通りの重複順列がある.

全体として、 $8 \cdot {}_{10}\Pi_6 = 8 \times 10^6$ 通りの電話番号が利用可能である.

2.7 重複組合せ

重複組合せ: n 種の異なるものから重複を許して r 個
とって作られる組合せ

重複組合せの数: $H(n, r)$ or ${}_nH_r$

例2.11

異なる3種のもの a, b, c から重複を許して3個とる組合せ
(方針: a を多く使用 $\rightarrow b$ を多く使用 $\rightarrow c$ を多く使用)

$aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, ccc, ccb$

$${}_3H_3 = 10$$

① a を含む組合せ: $aaa, aab, aac, abb, abc, acc$ 6通り

a を含む組合せから a を1個除く $\rightarrow aa, ab, ac, bb, bc, cc$

これは、異なる3種のものから重複を許して2個とる組合せに相当する

$${}_3H_2 = 6$$

② a を含まない組合せ: bbb, bbc, ccc, ccb

これは、異なる2種のものから3個とる組合せに相当する.

$${}_2H_3 = 4$$

全体の組合せは①+②である.

$${}_3H_3 = {}_3H_2 + {}_2H_3$$

定理2.9

$$\begin{aligned} {}_n H_r &= {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_r, & n > 0, r > 0 \\ {}_n H_0 &= 1, & {}_1 H_r &= 1 \end{aligned}$$

(証明)

① n 種の異なるものから重複を許して r 個とる組合せ
→ ${}_n H_r$

◆ n 種の異なるものの内、一つに目印をつける.

② 目印をつけたものを選ばない ($n \rightarrow n-1, r \rightarrow r$)
→ ${}_{n-1} H_r$

選ばれる種類は1個減る／選ぶ数は変わらない

③ 目印をつけたものを少なくとも1個選ぶ
($n \rightarrow n, r \rightarrow r-1$)

→ ${}_n H_{r-1}$

選ばれる種類は変わらない／選ぶ数は1個減る

① = ② + ③ ${}_n H_r = {}_n H_{r-1} + {}_{n-1} H_r$

定理2.10

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

(証明)

定理2.9に基づき, ${}_nH_0 = 1$, ${}_1H_r = 1$ を起点として,

$${}_nH_r = {}_nH_{r-1} + {}_{n-1}H_r$$

を繰り返し計算することにより, 全ての ${}_nH_r$ が得られる.

これを表にまとめる(→次頁)

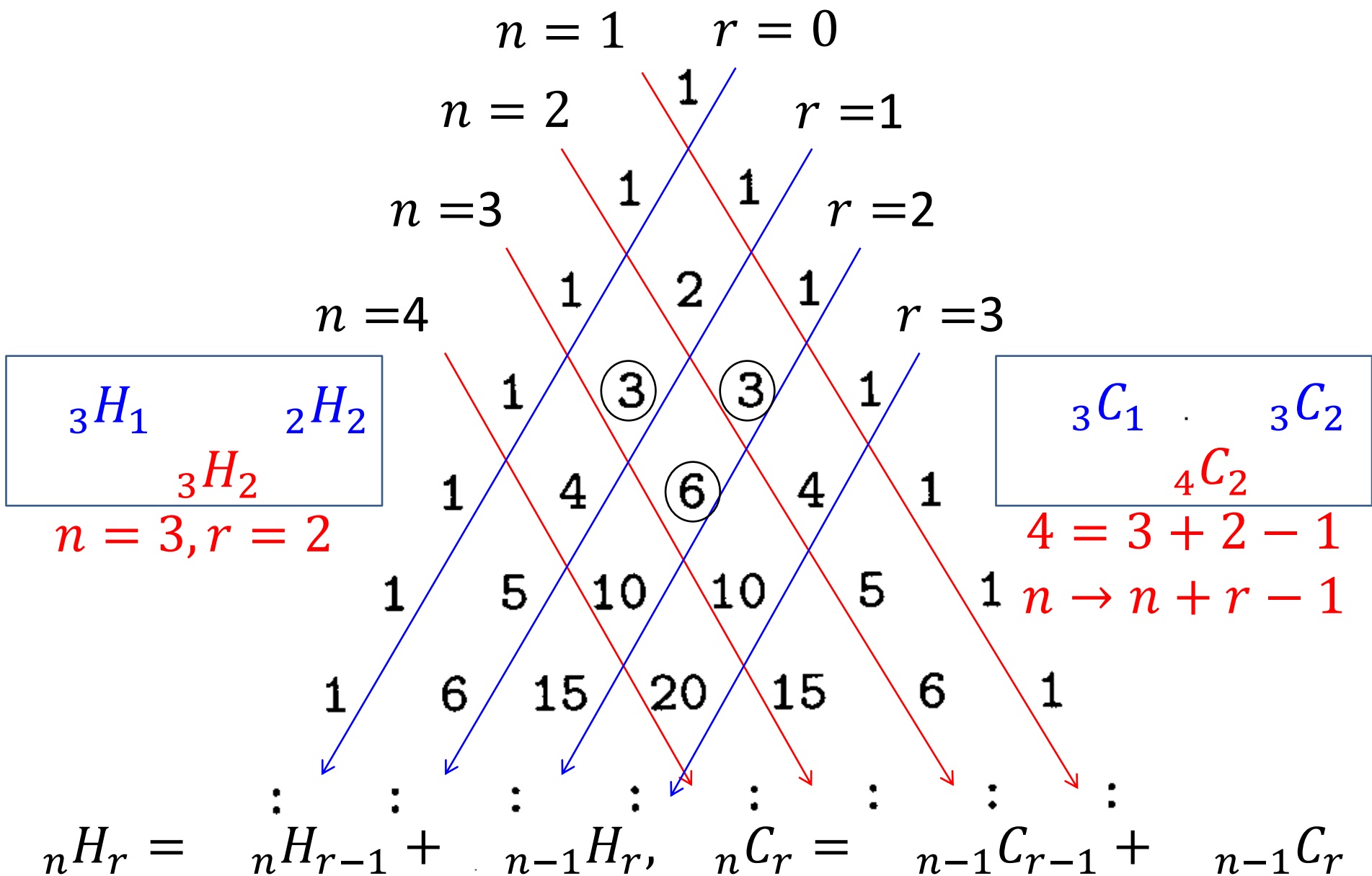


図 2.7 表 2.1 を 45 度回転させたもの

定理2.11

$$\begin{aligned} {}_nH_r = & {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} \\ & + \cdots + {}_{n-1}H_1 + 1 \end{aligned}$$

(証明) 定理2.9を繰り返し適用する.

$$\begin{aligned} {}_nH_r &= {}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1} \\ &= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_nH_{r-2} \\ &= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + {}_nH_{r-3} \\ &\vdots \\ &= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}H_1 + {}_nH_0 \\ &= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}H_1 + 1 \end{aligned}$$

演習問題(1)

$n = 5, r = 3$ の場合について以下の定理が成り立つことを示せ.

定理2.3

定理2.5

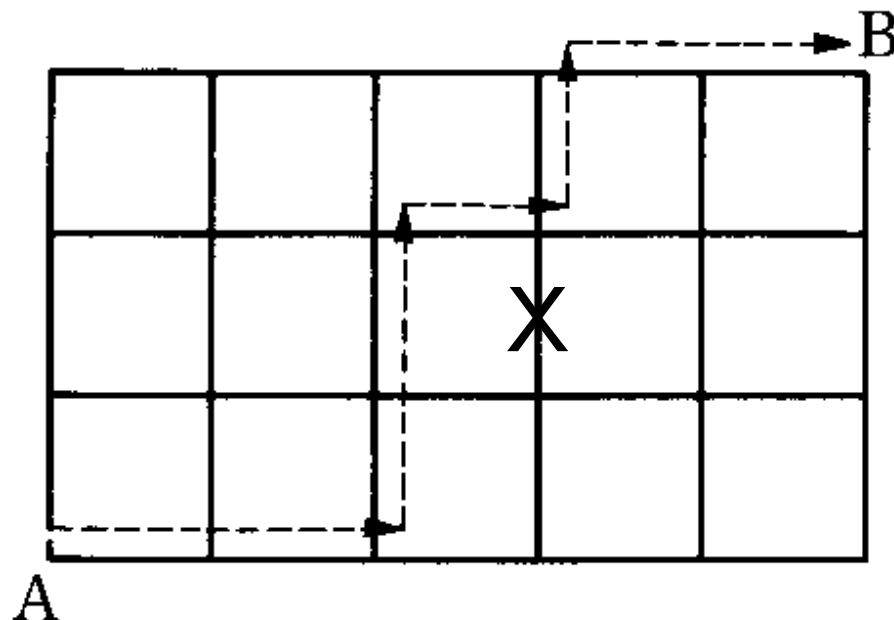
定理2.6

ただし, 順列と組合せの数は次式で計算すること.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad {}nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

演習問題(2)

下図の道路において、A点からB点へ行く経路の数を求めよ。但し、移動できる方向は右方向及び上方向のみとし、X印の付いた道路は通れないものとする。



演習問題(3)

宝くじの番号が7けたの数字であり, 各けたは0~9の数字で表されるものとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 宝くじの番号は何通りできるか?
- (2) 最初のけたに0を用いない場合は何通りになるか?
- (3) 5けた目の数字が5である番号は何通りあるか?