情報数学

中山クラス
第３週

＜内容＞
第2章
２．５ 順列・組合せに関する関係式
定理2．5～
２．６ 重複順列
２．７ 重複組合せ
演習問題

別の証明

①異なるn個のものからr個選ぶ組合せ＝ ${}_nC_r$

n個のうち一つに目印をつける（ある特定のものを指定）.

②目印付きのものを選ばない組合せ
→$n-1$個のものからr個を選ぶ組合せ＝ ${}_{n-1}C_r$
③目印付きのものを必ず選ぶ組合せ
→$n-1$個のものから$r-1$個を選ぶ組合せ＝ ${}_{n-1}C_{r-1}$

①は②と③を含み，かつ，②と③は同時に起こらないので，
和法則により①＝②＋③となる．

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} $$

定理2.5

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} $$
$$ {}_nC_0 = 1, \qquad {}_nC_n = 1 $$

パスカルの三角形（定理2.5より）

$${}_0C_0$$
$${}_1C_0 \quad {}_1C_1$$
$${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$$
$${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$$
$${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$$

${}_nC_r$： 上からn番目，左からr番目に位置する.
左側： ${}_nC_0 = 1$， 右側： ${}_nC_n = 1$
内部にある ${}_nC_r$＝左上＋右上

（証明）
関係式 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ により

$$ {}_{n-1}C_r = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\cdot r!} $$
$$ {}_{n-1}C_{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!\cdot (r-1)!} $$

となるので，これらの和を計算すると

$$ \begin{aligned} {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\cdot r!} + \frac{(n-1)!}{(n-r)!\cdot(r-1)!} \\ &= \frac{n!\cdot(n-r)}{(n-r)!\cdot r!\cdot n} + \frac{n!\cdot r}{(n-r)!\cdot r!\cdot n} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \\ &= {}_nC_r \end{aligned} $$

パスカルの三角形（例）

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

定理2.6

$_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r}C_0$

（証明）定理2．5を繰り返し適用する．

$$
\begin{aligned}
{}_{n+1}C_r &= {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \\
&= {}_nC_r + ({}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r-2}) \\
&= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + ({}_{n-2}C_{r-2} + {}_{n-2}C_{r-3}) \\
&\vdots \\
&= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + {}_{n-r+1}C_0 \\
&= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + 1 \\
&= {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r+1}C_1 + {}_{n-r}C_0
\end{aligned}
$$

一般的な表現

異なる$n+1$個のものの内，任意のr個に[1],[2],[3],...,[r]の印をつける．

① [1]以外のn個からr個を選ぶ組合せ→ $_nC_r$

② [1]を必ず含み，[2]を除く組合せ

→$n-1$個から$r-1$個を選ぶ組合せ→ $_{n-1}C_{r-1}$

集団から[1],[2]を除く→$n+1-2=n-1$

組合せから[1]を除く→$r-1$

③[1],[2]を必ず含み，[3]を除く組合せ→$n-2$個から$r-2$個を選ぶ組合せ→ $_{n-2}C_{r-2}$

集団から[1],[2],[3]を除く→$n+1-3=n-2$

組合せか[1],[2]を除く→$r-2$

◆[1],[2],[3],...,[r]を必ず含むまで繰り返す．

全体の組合せ＝①＋②＋③＋・・・・

別の証明

[1]を除く組合せ・・・①　[1]X

[1]を含める　・・・②

[2]を除く組合せ・・・②-a　[1]O,[2]X

[2]を含める　・・・②-b

[3]を除く組合せ　・・・②-b-1　[1],[2]O,[3]X

[3]を含める組合せ・・・②-b-2　[1],[2],[3]O

全体の組合せ＝①＋②-a＋②-b-1＋②-b-2

2.6　重複順列

重複順列：　同じものを繰り返し使用することを許して作られる順列

n個の異なるものからなる集団からr個を取り出して順列を作るが，その際に，同じものを複数回取り出すことを許す．「n個の異なるもの」→「n種の異なる」

（例）電話番号：10種の異なる数字（0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9）から重複を許して10個取り出して順列を作る．

$_n\Pi_r$：n種の異なるものから重複を許してr個とって作ることができる順列の数

<$n=7,\ r=3$の例題>

◆[1][2][3][4][5][6][7][8]の7＋1＝8個から3個選ぶ

→ $_{n+1}C_r = {}_8C_3$

①[1]を除く[2][3][4][5][6][7][8]の7個から3個選ぶ

→ $_nC_r = {}_7C_3$　集団から1を引く

②[1]を必ず含める（集団＆組合せから1を引く）

[2]を除く[3][4][5][6][7][8]の6個から2個選ぶ

→ $_{n-1}C_{r-1} = {}_6C_2$　さらに集団から1を引く

③[1][2]を必ず含める（集団＆組合せから2を引く）

[3]を除く[4][5][6][7][8]の5個から1個選ぶ

→ $_{n-2}C_{r-2} = {}_5C_1$　さらに集団から1を引く

④[1][2][3]を必ず含める（集団＆組合せから3を引く）

[4][5][6][7][8]の5個から0個選ぶ

→ $_{n-r}C_{r-r} = {}_{n-r}C_0 = {}_4C_0$

◆＝①＋②＋③＋④

定理2.7

$$_n\Pi_r = n \cdot {}_n\Pi_{r-1}$$
$$_n\Pi_0 = 1, \quad {}_n\Pi_1 = n$$

（証明）

①n種の異なるものから，まず1個をとる→n通り

②①の後に，n種の異なるものから$r-1$個とって重複順列を作る方法は $_n\Pi_{r-1}$

この場合，最初の1個に関係なくn種が全て使用できる．

③全体の重複順列： $_n\Pi_r$

①に対して $_n\Pi_{r-1}$だけの重複順列があり，①はn通りあるから

$$_n\Pi_r = n \cdot {}_n\Pi_{r-1}$$

定理2.8

$${}_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$

（証明）

定理 2.7 の関係式を繰り返し用いることにより，

$$\begin{aligned} {}_{n}\Pi_{r} &= n \cdot {}_{n}\Pi_{r-1} = n^{2} \cdot {}_{n}\Pi_{r-2} = \cdots \\ &= n^{r} \cdot {}_{n}\Pi_{0} \\ &= n^{r} \end{aligned}$$

例2.11

異なる3種のものa, b, cから重複を許して3個とる組合せ
（方針：aを多く使用→bを多く使用→cを多く使用）

$$aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, ccc, ccb$$

$${}_{3}H_{3} = 10$$

①aを含む組合せ：$aaa, aab, aac, abb, abc, acc$　6通り
aを含む組合せからaを1個除く→aa, ab, ac, bb, bc, cc
これは，異なる3種のものから重複を許して2個とる組合せに相当する

$${}_{3}H_{2} = 6$$

②aを含まない組合せ：bbb, bbc, ccc, ccb
これは，異なる2種のものから3個とる組合せに相当する.

$${}_{2}H_{3} = 4$$

全体の組合せは①＋②である.

$${}_{3}H_{3} = {}_{3}H_{2} + {}_{2}H_{3}$$

例2.10

電話番号＝市内局番3けた＋番号4けた＝7けた
利用可能な電話番号：10種の異なる数字から7個をとってできる重複順列の数

${}_{10}\Pi_{7} = 10^{7}$　通り

ただし，先頭の数字が0，1の局番は使用しない.
①先頭の数字は2～9の8通り
②先頭の数字1つに対して ${}_{10}\Pi_{6}$通りの重複順列がある.

全体として，$8 \cdot {}_{10}\Pi_{6} = 8 \times 10^{6}$通りの電話番号が利用可能である.

定理2.9

$${}_{n}H_{r} = {}_{n}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r}, \quad n > 0, r > 0$$
$${}_{n}H_{0} = 1, \quad {}_{1}H_{r} = 1$$

（証明）
①n種の異なるものから重複を許してr個とる組合せ
　→ ${}_{n}H_{r}$
◆n種の異なるものの内，一つに目印をつける.
②目印をつけたものを選ばない（$n \to n-1,\ r \to r$）
　→ ${}_{n-1}H_{r}$
　選ばれる種類は1個減る／選ぶ数は変わらない
③目印をつけたものを少なくとも1個選ぶ
　（$n \to n,\ r \to r-1$）
　→ ${}_{n}H_{r-1}$
　選ばれる種類は変わらない／選ぶ数は1個減る
①＝②＋③　${}_{n}H_{r} = {}_{n}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r}$

2.7　重複組合せ

重複組合せ：n種の異なるものから重複を許してr個とって作られる組合せ

重複組合せの数：　$H(n, r)$　or　${}_{n}H_{r}$

定理2.10

$${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$$

（証明）
定理2.9に基づき，${}_{n}H_{0} = 1$，${}_{1}H_{r} = 1$を起点として，

$${}_{n}H_{r} = {}_{n}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r}$$

を繰り返し計算することにより，全ての ${}_{n}H_{r}$が得られる.
これを表にまとめる（→次頁）

表 2.1　重複組合せの数 $_nH_r$

		r					
		0	1	2	3	4	$\cdots$
n	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
	2	1	2	3	4	5	$\cdots$
	3	1	3	6	10	15	$\cdots$
	4	1	4	10	20	35	$\cdots$
	5	1	5	15	35	70	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

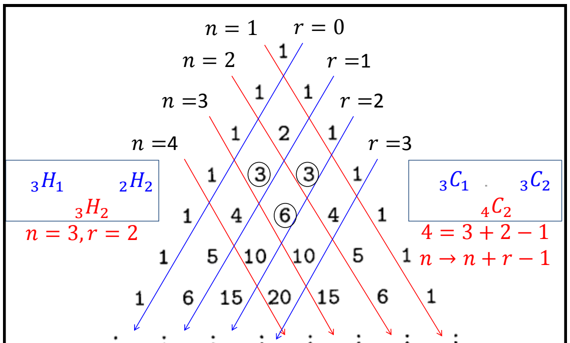
演習問題（1）

$n=5, r=3$の場合について以下の定理が成り立つことを示せ.

定理2.3
定理2.5
定理2.6

ただし，順列と組合せの数は次式で計算すること.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad _nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

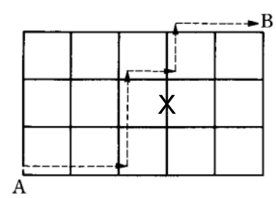


$$_nH_r = {}_nH_{r-1} + {}_{n-1}H_r, \quad _nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

図 2.7　表 2.1 を 45 度回転させたもの

演習問題（2）

下図の道路において，A点からB点へ行く経路の数を求めよ．但し，移動できる方向は右方向及び上方向のみとし，X印の付いた道路は通れないものとする.



定理2.11

$$_nH_r = {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + \cdots + {}_{n-1}H_1 + 1$$

（証明）定理2.9を繰り返し適用する.

$$\begin{aligned}
_nH_r &= {}_{n-1}H_r + {}_nH_{r-1} \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_nH_{r-2} \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + {}_{n-1}H_{r-2} + {}_nH_{r-3} \\
&\vdots \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}H_1 + {}_nH_0 \\
&= {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}H_1 + 1
\end{aligned}$$

演習問題（3）

宝くじの番号が7けたの数字であり，各けたは0～9の数字で表されるものとする．以下の問に答えよ.

（1）宝くじの番号は何通りできるか？
（2）最初のけたに0を用いない場合は何通りになるか?
（3）5けた目の数字が5である番号は何通りあるか？