情報数学

中山クラス
第４週

＜授業内容＞

◇演習問題（前回分）の解説
２．８　　二項定理
２．９　　多項係数
◇演習問題

演習問題（1）

$n = 5, r = 3$の場合について以下の定理が成り立つことを示せ．

定理2.3，定理2.5，定理2.6

ただし，順列と組合せの数は次式で計算すること．

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

＜解答例＞

定理2．3

$$ {}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}, \qquad (n \geq 2, 1 \leq r < n) $$

左辺＝ ${}_5P_3 = 60$，右辺＝ ${}_4P_3 + 3\,{}_4P_2 = 60$

定理2.5

$$ {}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1} $$
$$ {}_{n}C_{0} = 1, \quad {}_{n}C_{n} = 1 $$

左辺= ${}_{5}C_{3} = 10$, 右辺= ${}_{4}C_{3} + {}_{4}C_{2} = 10$

$$ {}_{5}C_{0} = 1, \quad {}_{5}C_{5} = 1 $$

定理2.6

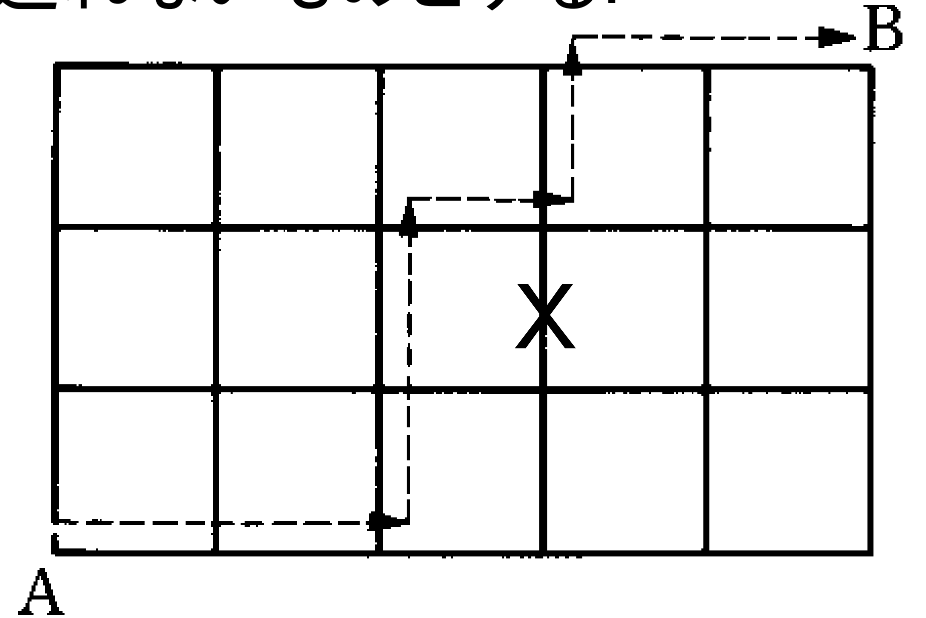
$$ {}_{n+1}C_{r} = {}_{n}C_{r} + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_{n-r}C_{0} $$

左辺= ${}_{6}C_{3} = 20$

右辺= ${}_{5}C_{3} + {}_{4}C_{2} + {}_{3}C_{1} + {}_{2}C_{0} = 20$

演習問題(2)

下図の道路において，A点からB点へ行く経路の数を求めよ．但し，移動できる方向は右方向及び上方向のみとし，X印の付いた道路は通れないものとする．



①全体の経路の数

一つの経路は8個のブロックを含む．↑の選択は8個の異なるものから3個を選ぶ組合せになる．

$${}_8C_3 = 56$$

②Xを通る経路の数

A→X：4個のブロックと1個の↑を含む→ ${}_4C_1 = 4$通り

X→B：3個のブロックと1個の↑を含む→ ${}_3C_1 = 3$通り

これらは独立で，同時に起こるから，$4 \times 3 = 12$通り

答え＝①ー②$= 56 - 12 = 44$通り

演習問題(3)

宝くじの番号が7けたの数字であり，各けたは0～9の数字で表されるものとする．以下の問に答えよ．

(1) 宝くじの番号は何通りできるか？

(2) 最初のけたに0を用いない場合は何通りになるか?

(3) 5けた目の数字が5である番号は何通りあるか？

＜解答例＞

(1) 1つの桁に入る数字は10通り．7桁あるから

$$ {}_{10}\Pi_7 = 10^7 \text{通り} $$

(2) 最初の数字は9通り．残りの6桁は(1)と同じ．

$$ 9 \times {}_{10}\Pi_6 = 9 \times 10^6 \text{通り} $$

(3) 5桁目の数字は5の1通り，残りの6桁は(1)と同じ．

$$ 1 \times {}_{10}\Pi_6 = 10^6 \text{通り} $$

2.8 二項定理

次の式展開を組合せの数で表現

定理 2.12

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots$$
$$+ {}_nC_{n-2} x^{n-2} + {}_nC_{n-1} x^{n-1} + {}_nC_n x^n$$

(証明)

n に関する帰納法で証明する。

まず，$n=1$ の場合には $(1+x)^1 = 1 + x = {}_1C_0 + {}_1C_1 x^1$ となり，関係式が成立する。

ここで，$n=k$ の場合について関係式が成立すると仮定すると

$$(1+x)^k = {}_kC_0 + {}_kC_1 x + {}_kC_2 x^2 + \cdots$$
$$+ {}_kC_{k-2} x^{k-2} + {}_kC_{k-1} x^{k-1} + {}_kC_k x^k$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= {}_kC_0(1+x) + {}_kC_1x(1+x) + {}_kC_2x^2(1+x) \\
&\quad + \cdots + {}_kC_{k-2}x^{k-2}(1+x) + {}_kC_{k-1}x^{k-1}(1+x) \\
&\quad + {}_kC_kx^k(1+x) \\
&= {}_kC_0 + ({}_kC_0 + {}_kC_1)x + ({}_kC_1 + {}_kC_2)x^2 + \cdots \\
&\quad + ({}_kC_j + {}_kC_{j+1})x^{j+1} + \cdots + ({}_kC_{k-1} + {}_kC_k)x^k + {}_kC_kx^{k+1}
\end{aligned}
$$

この関係式の右辺を**定理 2.5** を用いてさらに計算すると

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= 1 + {}_{k+1}C_1x + {}_{k+1}C_2x^2 + \cdots + {}_{k+1}C_{j+1}x^{j+1} + \cdots \\
&\quad + {}_{k+1}C_kx^k + x^{k+1} \\
&= {}_{k+1}C_0 + {}_{k+1}C_1x + {}_{k+1}C_2x^2 + \cdots + {}_{k+1}C_{j+1}x^{j+1} + \cdots \\
&\quad + {}_{k+1}C_kx^k + {}_{k+1}C_{k+1}x^{k+1}
\end{aligned}
$$

別の証明

$$(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

x^0の係数:　　５個からxを０個選ぶ

x^1の係数:　①　②　③　④　⑤

５個からxを１個選ぶ

x^2の係数:　①　①

②　②　５個からxを２個選ぶ

③　③

x^3の係数:　①　①　①

②　②　②　５個からxを３個選ぶ

③　③　③

x^0の係数:　全ての因数からxを選ばない＝　${}_5C_0$

x^1の係数:１個の因数からxを選ぶ＝５個の異なる物
から１個を選ぶ組合せの数＝　${}_5C_1$

x^2の係数:２個の因数からxを選ぶ＝５個の異なる物
から２個を選ぶ組合せの数＝　${}_5C_2$

……

x^rの係数:r個の因数からxを選ぶ＝５個の異なる物
からr個選ぶ組合せの数＝　${}_5C_r$

定理 2.13

$$ {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_r + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n $$

(証明)

定理 2.12 で $x = 1$ を代入すれば，この関係式が得られる。

定理 2.14

$$ {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0 $$

(証明)

定理 2.12 で $x = -1$ を代入すれば，この関係式が得られる。

$$ {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots $$

偶数個取り出す方法と奇数個取り出す方法が同じ数である.

2.9 多項係数

全てが異なるとは限らない物から作る順列の数

定理2.15

第1種，第2，・・・，第k種の物がそれぞれ$n_1, n_2, \cdots, n_k$個あり，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$であるとき，これら$n$個の物を全て使って出来る順列の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

となる．但し，同種の物は区別が付かず，これらを入れ替えた順列は元の順列と同じと見なす．

＜例題による証明(1)＞

◆総数:$n = 18$

第1種:○ $n_1 = 8$，第2種:□ $n_2 = 6$，第3種:△ $n_3 = 4$

◆全て異なるとしたときの並べ順の数

$$ {}_{n}P_{n} = {}_{18}P_{18} = n! = 18! $$

◆並び順の一例

○□○△○△○□□○△△□□○○□○

各種において全て異なるとしたときの並び順の数

○: ${}_{8}P_{8} = 8!$，□: ${}_{6}P_{6} = 6!$，△: ${}_{4}P_{4} = 4!$

◆ ${}_{n}P_{n}$のうち，上記の分が同じものとなる.

◆○，□，△の並び順の数・・・求めるもの

$$ \binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \frac{{}_{n}P_{n}}{{}_{n_1}P_{n_1} \cdot {}_{n_2}P_{n_2} \cdot {}_{n_3}P_{n_3}} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} $$

＜例題による証明(2)＞

総数:$n = 18$

第1種:○ $n_1 = 8$, 第2種:□ $n_2 = 6$, 第3種:△ $n_3 = 4$

◆並び順の一例

○□○△○△○□□○△△□□○○□○

◆○, □, △の並び順の数・・・求めるもの

(18(n)個から8(n_1)個を選ぶ組合せの数)

×(10($n - n_1$)個から6(n_2)個を選ぶ組合せの数)

$$= \quad {}_{n}C_{n_1} \times \quad {}_{n-n_1}C_{n_2} = \quad {}_{18}C_8 \times \quad {}_{10}C_6$$

$${}_{n}C_{n_1} \times \quad {}_{n-n_1}C_{n_2} = \frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}, \qquad n = n_1 + n_2 + n_3$$

例2.12

赤いボール　　３個
青いボール　５個
黄色いボール　２個

全て並べて作る順列の数

$$\binom{10}{3,5,2} = \frac{10!}{3!\,5!\,2!} = 2520$$

例2.13

多項係数は手持ちの物を全て使い切ることを前提
全て使用しない場合は，場合分けをして多項係数を適用

赤いボール5個，青いボール2個（合計7個）
４個選んで作る順列の数

４個の内訳を考える
①赤４個，②赤３個，青１個，③赤２個，青２個

①～③に独立に多項係数を適用する.
①～③は同時に起こらないので，和法則を適用する.

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3,1} + \binom{4}{2,2} = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!\,1!} + \frac{4!}{2!\,2!}$$
$$= 1 + 4 + 6 = 11$$

系2.1

第1種，第2種，・・・，第k種の物が各々$n_1, n_2, \cdots, n_k$個あり，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$であるとする．これら$n$個の物を$n$個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

となる．但し，同種の物同士は区別が付かず，入れ替えても同じものと見なす．

（証明）
n個の異なる箱に$1 \sim n$の番号をつけると，箱に入れることと，順列を作ることは同じになる．

系2.2

異なるn個の物を異なるk個の箱にそれぞれ$n_1, n_2, \cdots, n_k$個ずつ入れる入れ方の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

となる．但し，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨　・・・　異なる9個の物

3個の箱に入れる例

A[4個:①②③④], B[3個:⑤⑥⑦], C[2個:⑧⑨]

A[4個:①③⑤⑦], B[3個:④⑥⑧], C[2個:②⑨]

A[4個:④⑤⑦⑨], B[3個:①③⑥], C[2個:②⑧]

(1)箱Aの数:9個から4個選ぶ組合せの数= ${}_9C_4$

(2)箱Bの数:$9-4=5$個から3個選ぶ組合せの数

$= {}_5C_3$

(3)箱Cの数:$5-3=2$個から2個選ぶ組合せの数

$= {}_2C_2 = 1$

(1)～(3)は同時に起こるので積法則を適用

$${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2$$

この式は多項係数と同じである.

定理2.16（多項展開）

多項係数は多項式の展開係数としても現れる.

定理 2.16（多項展開）

$$
\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n \\
&= \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}
\end{aligned}
$$

$$(x_1+x_2+x_3)^4=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)\\ \times(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)$$

$x_1^2x_2x_3$:（４個の因数からx_1を２個選ぶ組合せの数）
×（２個の因数からx_2を１個選ぶ組合せの数）
×（１個の因数からx_3を１個選ぶ組合せの数）

$$= \ {}_4C_2 \times \ {}_2C_1 \times \ {}_1C_1 = \binom{4}{2,1,1}$$

$x_1x_2x_3^2$:（４個の因数からx_1を１個選ぶ組合せの数）
×（３個の因数からx_2を１個選ぶ組合せの数）
×（２個の因数からx_3を２個選ぶ組合せの数）

$$= \ {}_4C_1 \times \ {}_3C_1 \times \ {}_2C_2 = \binom{4}{1,1,2}$$

$x_2^2x_3^2$:（４個の因数からx_2を２個選ぶ組合せの数）
×（２個の因数からx_3を２個選ぶ組合せの数）

$$= \ {}_4C_2 \times \ {}_2C_2 = \binom{4}{2,2}$$

例2.14

$(x+y+z)^7$を展開して得られる$x^2y^3z^2$の係数

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$$

（参考）$\binom{4}{1,1,2} = \binom{4}{1,2,1} = \binom{4}{2,1,1}$

例2.15

$(1+x+x^3+x^5)^5$を展開してできるx^5の係数

＜x^5の構成＞

① $1\times 1\times 1\times 1\times x^5$

（5個の因数から1を4個選ぶ組合せ）

×（1個の因数からx^5を1個選ぶ組合せ）$=\binom{5}{4,1}$

② $1\times 1\times x\times x\times x^3$

（5個の因数から1を2個選ぶ組合せ）

×（3個の因数からxを2個選ぶ組合せ）

×（1個の因数からx^3を1個選ぶ組合せ）$=\binom{5}{2,2,1}$

③ $x\times x\times x\times x\times x$

5個の因数からxを5個選ぶ組合せ$=\binom{5}{5}$

x^5の係数＝①＋②＋③＝36

＜別の方法＞

$(1+x+x^3+x^5)^5$を展開してできるx^5の係数

$1, x, x^3, x^5$を別の記号に置き換える.

$$v=1, \qquad w=x, \qquad y=x^3, \qquad z=x^5$$

＜x^5の構成＞

① v^4zの係数$=\begin{pmatrix}5\\4,1\end{pmatrix}$

② v^2w^2yの係数$=\begin{pmatrix}5\\2,2,1\end{pmatrix}$

③ w^5の係数$=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

x^5の係数 ＝①＋②＋③＝36

演習問題

問題1
赤いボール6個，青いボール3個から5個選んで出来る順列の数を求めよ.

問題2
$(1+x+x^2+x^4)^5$ を展開してできる多項式において，x^6の係数を求めよ.