

情報数学

中山クラス 第4週

<授業内容>

◇演習問題(前回分)の解説

2. 8 二項定理

2. 9 多項係数

◇演習問題

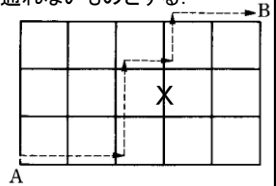
演習問題(2)

下図の道路において、A点からB点へ行く経路の数を求めよ。但し、移動できる方向は右方向及び上方向のみとし、X印の付いた道路は通れないものとする。

①全体の経路の数

一つの経路は8個のブロックを含む。↑の選択は8個の異なるものから3個を選ぶ組合せになる。

$${}_8C_3 = 56$$



②Xを通る経路の数

A→X: 4個のブロックと1個の↑を含む → ${}_4C_1 = 4$ 通り

X→B: 3個のブロックと1個の↑を含む → ${}_3C_1 = 3$ 通り

これらは独立で、同時に起こるから、 $4 \times 3 = 12$ 通り

答え=①-②= $56 - 12 = 44$ 通り

演習問題(1)

$n = 5, r = 3$ の場合について以下の定理が成り立つことを示せ。

定理2.3, 定理2.5, 定理2.6

ただし、順列と組合せの数は次式で計算すること。

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

<解答例>

定理2.3

$${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}, \quad (n \geq 2, 1 \leq r < n)$$

$$\text{左辺} = {}_5P_3 = 60, \text{右辺} = {}_4P_3 + 3 \cdot {}_4P_2 = 60$$

演習問題(3)

宝くじの番号が7けたの数字であり、各けたは0～9の数字で表されるものとする。以下の問に答えよ。

(1) 宝くじの番号は何通りできるか？

(2) 最初のけたに0を用いない場合は何通りになるか？

(3) 5けた目の数字が5である番号は何通りあるか？

<解答例>

(1) 1つの桁に入る数字は10通り。7桁あるから

$${}_{10}\Pi_7 = 10^7 \text{通り}$$

(2) 最初の数字は9通り。残りの6桁は(1)と同じ。

$$9 \times {}_{10}\Pi_6 = 9 \times 10^6 \text{通り}$$

(3) 5桁目の数字は5の1通り。残りの6桁は(1)と同じ。

$$1 \times {}_{10}\Pi_6 = 10^6 \text{通り}$$

定理2.5

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \\ {}_nC_0 = 1, \quad {}_nC_n = 1$$

$$\text{左辺} = {}_5C_3 = 10, \text{右辺} = {}_4C_3 + {}_4C_2 = 10 \\ {}_5C_0 = 1, \quad {}_5C_5 = 1$$

定理2.6

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-2}C_{r-2} + \cdots + {}_nC_0$$

$$\text{左辺} = {}_6C_3 = 20$$

$$\text{右辺} = {}_5C_3 + {}_4C_2 + {}_3C_1 + {}_2C_0 = 20$$

2.8 二項定理

次の式展開を組合せの数で表現

定理 2.12

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_rx^r + \cdots \\ + {}_nC_{n-2}x^{n-2} + {}_nC_{n-1}x^{n-1} + {}_nC_nx^n$$

(証明)

n に関する帰納法で証明する。

まず、 $n = 1$ の場合には $(1+x)^1 = 1+x = {}_1C_0 + {}_1C_1x^1$ となり、関係式が成立する。

ここで、 $n = k$ の場合について関係式が成立すると仮定すると

$$(1+x)^k = {}_kC_0 + {}_kC_1x + {}_kC_2x^2 + \cdots \\ + {}_kC_{k-2}x^{k-2} + {}_kC_{k-1}x^{k-1} + {}_kC_kx^k$$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{k+1} &= {}_k C_0(1+x) + {}_k C_1 x(1+x) + {}_k C_2 x^2(1+x) \\
 &\quad + \cdots + {}_k C_{k-2} x^{k-2}(1+x) + {}_k C_{k-1} x^{k-1}(1+x) \\
 &\quad + {}_k C_k x^k(1+x) \\
 &= {}_k C_0 + ({}_k C_0 + {}_k C_1)x + ({}_k C_1 + {}_k C_2)x^2 + \cdots \\
 &\quad + ({}_k C_j + {}_k C_{j+1})x^{j+1} + \cdots + ({}_k C_{k-1} + {}_k C_k)x^k + {}_k C_k x^{k+1}
 \end{aligned}$$

この関係式の右辺を定理 2.5 を用いてさらに計算すると

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{k+1} &= 1 + {}_{k+1} C_1 x + {}_{k+1} C_2 x^2 + \cdots + {}_{k+1} C_{j+1} x^{j+1} + \cdots \\
 &\quad + {}_{k+1} C_k x^k + x^{k+1} \\
 &= {}_{k+1} C_0 + {}_{k+1} C_1 x + {}_{k+1} C_2 x^2 + \cdots + {}_{k+1} C_{j+1} x^{j+1} + \cdots \\
 &\quad + {}_{k+1} C_k x^k + {}_{k+1} C_{k+1} x^{k+1}
 \end{aligned}$$

定理 2.13

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + \cdots + {}_n C_r + \cdots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n = 2^n$$

(証明)

定理 2.12 で $x = 1$ を代入すれば、この関係式が得られる。

定理 2.14

$${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0$$

(証明)

定理 2.12 で $x = -1$ を代入すれば、この関係式が得られる。

$${}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots = {}_n C_1 + {}_n C_3 + {}_n C_5 + \cdots$$

偶数個取り出す方法と奇数個取り出す方法が同じ数である。

別の証明

$$(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

x^0 の係数:					5個から x を0個選ぶ
x^1 の係数:	①	②	③	④	⑤
				④	⑤
				④	⑤
x^2 の係数:	①	①			
		②		②	
			③	③	
			③	③	
x^3 の係数:	①		①	①	
	②	②	②		
		③	③	③	
			③	③	

2.9 多項係数

全てが異なるとは限らない物から作る順列の数

定理 2.15

第1種, 第2, ..., 第 k 種の物がそれぞれ $n_1, n_2, \dots, n_k$ 個あり, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ であるとき, これら n 個の物を全て使って出来る順列の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

となる。但し、同種の物は区別が付かず、これらを入れ替えた順列は元の順列と同じと見なす。

$$x^0 \text{の係数: 全ての因数から} x \text{を選ばない} = {}_5 C_0$$

$$x^1 \text{の係数: 1個の因数から} x \text{を選ぶ} = 5 \text{個の異なる物から1個を選ぶ組合せの数} = {}_5 C_1$$

$$x^2 \text{の係数: 2個の因数から} x \text{を選ぶ} = 5 \text{個の異なる物から2個を選ぶ組合せの数} = {}_5 C_2$$

.....

$$x^r \text{の係数: } r \text{個の因数から} x \text{を選ぶ} = 5 \text{個の異なる物から} r \text{個選ぶ組合せの数} = {}_5 C_r$$

<例題による証明(1)>

◆総数: $n = 18$

第1種: $\bigcirc n_1 = 8$, 第2種: $\square n_2 = 6$, 第3種: $\triangle n_3 = 4$

◆全て異なるとしたときの並び順の数

$${}_n P_n = {}_{18} P_{18} = n! = 18!$$

◆並び順の一例

$$\bigcirc \square \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \square \square \bigcirc \triangle \triangle \square \square \bigcirc \bigcirc \square \bigcirc$$

各種において全て異なるとしたときの並び順の数

$$\bigcirc: {}_8 P_8 = 8!, \square: {}_6 P_6 = 6!, \triangle: {}_4 P_4 = 4!$$

◆ ${}_n P_n$ のうち、上記の分が同じものとなる。

◆ $\bigcirc, \square, \triangle$ の並び順の数...求めるもの

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \frac{{}_n P_n}{n_1! n_2! n_3!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$

<例題による証明(2)>

総数: $n = 18$ 第1種: $\bigcirc n_1 = 8$, 第2種: $\square n_2 = 6$, 第3種: $\triangle n_3 = 4$

◆並び順の一例

 $\bigcirc \bigcirc \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \square \square \bigcirc \triangle \triangle \square \square \bigcirc \bigcirc \square \bigcirc$ ◆ $\bigcirc, \square, \triangle$ の並び順の数...求めるもの(18(n))個から8(n_1)個を選ぶ組合せの数) $\times$ (10($n - n_1$))個から6(n_2)個を選ぶ組合せの数)

$$= {}_n C_{n_1} \times {}_{n-n_1} C_{n_2} = {}_{18} C_8 \times {}_{10} C_6$$

$${}_n C_{n_1} \times {}_{n-n_1} C_{n_2} = \frac{n!}{(n-n_1)! n_1!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)! n_2!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3$$

系2.1

第1種, 第2種, ..., 第 k 種の物が各々 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 個あり, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ であるとする. これら n 個の物を n 個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

となる. 但し, 同種の物同士は区別がつかず, 入れ替えても同じものと見なす.

(証明)

n 個の異なる箱に1~ n の番号をつけると, 箱に入れることと, 順列を作ることは同じになる.

例2.12

赤いボール 3個

青いボール 5個

黄色いボール 2個

全て並べて作る順列の数

$$\binom{10}{3,5,2} = \frac{10!}{3! 5! 2!} = 2520$$

系2.2

異なる n 個の物を異なる k 個の箱にそれぞれ $n_1, n_2, \dots, n_k$ 個ずつ入れる入れ方の数は

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

となる. 但し, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

例2.13

多項係数は手持ちの物を全て使い切ることを前提
全て使用しない場合は, 場合分けをして多項係数を適用

赤いボール5個, 青いボール2個(合計7個)

4個選んで作る順列の数

4個の内訳を考える

①赤4個, ②赤3個, 青1個, ③赤2個, 青2個

①~③に独立に多項係数を適用する.

①~③は同時に起こらないので, 和法則を適用する.

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3,1} + \binom{4}{2,2} = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3! 1!} + \frac{4!}{2! 2!}$$

$$= 1 + 4 + 6 = 11$$

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨ ... 異なる9個の物

3個の箱に入れる例

A[4個:①②③④], B[3個:⑤⑥⑦], C[2個:⑧⑨]

A[4個:①③⑤⑦], B[3個:④⑥⑧], C[2個:②⑨]

A[4個:④⑤⑦⑨], B[3個:①③⑥], C[2個:②⑧]

(1)箱Aの数:9個から4個選ぶ組合せの数= ${}_9 C_4$

(2)箱Bの数:9-4=5個から3個選ぶ組合せの数
= ${}_5 C_3$

(3)箱Cの数:5-3=2個から2個選ぶ組合せの数
= ${}_2 C_2 = 1$

(1)~(3)は同時に起こるので積法則を適用

$${}_9 C_4 \times {}_5 C_3 \times {}_2 C_2$$

この式は多項係数と同じである.

定理2.16(多項展開)

多項係数は多項式の展開係数としても現れる.

定理 2.16 (多項展開)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

例2.15

$(1 + x + x^3 + x^5)^5$ を展開してできる x^5 の係数

< x^5 の構成>

- ① $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times x^5$
(5個の因数から1を4個選ぶ組合せ)
 $\times$ (1個の因数から x^5 を1個選ぶ組合せ) $= \binom{5}{4,1}$
 - ② $1 \times 1 \times x \times x \times x^3$
(5個の因数から1を2個選ぶ組合せ)
 $\times$ (3個の因数から x を2個選ぶ組合せ)
 $\times$ (1個の因数から x^3 を1個選ぶ組合せ) $= \binom{5}{2,2,1}$
 - ③ $x \times x \times x \times x \times x$
5個の因数から x を5個選ぶ組合せ $= \binom{5}{5}$
- x^5 の係数 $= ① + ② + ③ = 36$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) \times (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$$

$x_1^2 x_2 x_3$: (4個の因数から x_1 を2個選ぶ組合せの数)
 $\times$ (2個の因数から x_2 を1個選ぶ組合せの数)
 $\times$ (1個の因数から x_3 を1個選ぶ組合せの数)

$$= {}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = \binom{4}{2,1,1}$$

$x_1 x_2 x_3^2$: (4個の因数から x_1 を1個選ぶ組合せの数)
 $\times$ (3個の因数から x_2 を1個選ぶ組合せの数)
 $\times$ (2個の因数から x_3 を2個選ぶ組合せの数)

$$= {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 = \binom{4}{1,1,2}$$

$x_2^2 x_3^2$: (4個の因数から x_2 を2個選ぶ組合せの数)
 $\times$ (2個の因数から x_3 を2個選ぶ組合せの数)

$$= {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \binom{4}{2,2}$$

<別の方法>

$(1 + x + x^3 + x^5)^5$ を展開してできる x^5 の係数

$1, x, x^3, x^5$ を別の記号に置き換える.

$$v = 1, \quad w = x, \quad y = x^3, \quad z = x^5$$

< x^5 の構成>

- ① $v^4 z$ の係数 $= \binom{5}{4,1}$
- ② $v^2 w^2 y$ の係数 $= \binom{5}{2,2,1}$
- ③ w^5 の係数 $= \binom{5}{5}$

$$\text{color: red; } x^5 \text{の係数} = ① + ② + ③ = 36$$

例2.14

$(x + y + z)^7$ を展開して得られる $x^2 y^3 z^2$ の係数

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

(参考) $\binom{4}{1,1,2} = \binom{4}{1,2,1} = \binom{4}{2,1,1}$

演習問題

問題1

赤いボール6個, 青いボール3個から5個選んで出来る順列の数を求めよ.

問題2

$(1 + x + x^2 + x^4)^5$ を展開してできる多項式において,
 x^6 の係数を求めよ.