

情報数学

中山クラス 第5週

<講義内容>

◇演習問題(前回分)の解説

2. 10 物の分配

◇小テスト予想問題

演習問題

問題1

赤いボール6個，青いボール3個から5個選んで出来る順列の数を求めよ.

<解答例>

可能な組合せを考える

(方針) 赤を多く使う→青を多く使う.

- ①赤5個，②赤4個＋青1個，③赤3個＋青2個，
④赤2個＋青3個

①～④に独立に多項係数を適用する.

①～④は同時には起こらないので，和法則を適用する.

$$\begin{aligned} \binom{5}{5} + \binom{5}{4,1} + \binom{5}{3,2} + \binom{5}{2,3} &= \frac{5!}{5!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} \\ &= 1 + 5 + 10 + 10 = 26 \end{aligned}$$

問題2

$(1 + x + x^2 + x^4)^5$ を展開してできる多項式において、 x^6 の係数を求めよ.

<解答例1>

x^6 の構成を考える. (方針) 低次→高次の項を使う

- | | |
|---|---|
| ① $x \times x \times x \times x \times x^2$ | ${}_5C_4 \times {}_1C_1$ |
| ② $x \times x \times x^2 \times x^2 \times 1$ | ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1$ |
| ③ $x \times x \times x^4 \times 1 \times 1$ | ${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2$ |
| ④ $x^2 \times x^2 \times x^2 \times 1 \times 1$ | ${}_5C_3 \times {}_2C_2$ |
| ⑤ $x^2 \times x^4 \times 1 \times 1 \times 1$ | ${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3$ |

x^6 の係数 = ① + ② + ③ + ④ + ⑤

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{4,1} + \binom{5}{2,2,1} + \binom{5}{2,1,2} + \binom{5}{3,2} + \binom{5}{1,1,3} \\ &= \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{2!1!2!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{1!1!3!} = 95 \end{aligned}$$

<解答例2>

x^r を次のような記号で置き換える.

$$1 \rightarrow u, \quad x \rightarrow v, \quad x^2 \rightarrow w, \quad x^4 \rightarrow y$$

x^6 の構成を考える.

(方針) x^r の低次の項を多く使う

① $v^4 \times w^1$	${}_5C_4 \times {}_1C_1$
② $v^2 \times w^2 \times u^1$	${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1$
③ $v^2 \times y^1 \times u^2$	${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2$
④ $w^3 \times u^2$	${}_5C_3 \times {}_2C_2$
⑤ $w^1 \times y^1 \times u^3$	${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3$

$$x^6 \text{の係数} = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{4,1} + \binom{5}{2,2,1} + \binom{5}{2,1,2} + \binom{5}{3,2} + \binom{5}{1,1,3} \\ &= \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{2!2!1!} + \frac{5!}{2!1!2!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{1!1!3!} = 95 \end{aligned}$$

2.10 物の分配

r 個の物を分配して n 個の箱に入れる問題を考える.

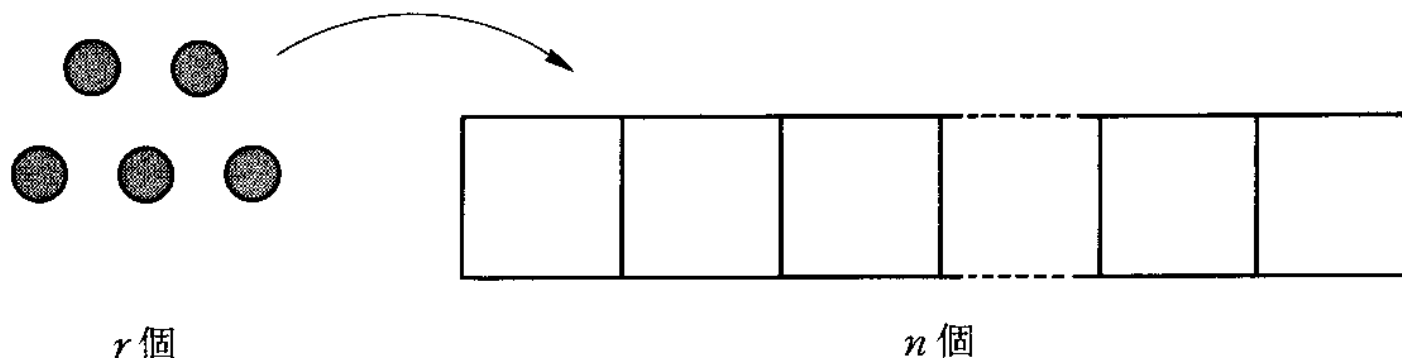


図 2.8 物 の 分 配

<付加条件による問題の大別>

1. 異なる物を異なる箱に入れる.
2. 同じ種類の物を異なる箱に入れる.
3. 異なる物を同じ種類の箱に入れる.
4. 同じ種類の物を同じ種類の箱に入れる.

1の問題(1)

1. 異なる r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.
各箱に入れる物を高々1個に制限する場合

$n > r$ のときは ${}_nP_r$ 通りとなり, $n \leq r$ のときは ${}_rP_n$ 通りとなる. 但し, どの箱にも入れずに余った物はそのまま残すものとする.

(証明)

$n > r$ のときは, 箱の数が多いので, 物に対して箱を選ぶことが出来る. 第1番目の物 $\rightarrow n$ 通りの箱, 第2番目の物 $\rightarrow n - 1$ 通りの箱を選ぶことが出来る $\rightarrow {}_nP_r$ 通りとなる.

$n \leq r$ のときは, 物の数が多い(等しい)ので, 箱に対して物を選ぶことが出来る. 第1番目の箱 $\rightarrow r$ 通りの物, 第2番目の箱 $\rightarrow r - 1$ 通りの物を選ぶことが出来る $\rightarrow {}_rP_n$ 通り.

$$n > r$$

① ② ③

[A][B][C][D][E]

5個の箱から①, ②, ③を
入れる3個の箱を選ぶ

${}_nP_r$ 通り

$$n \leq r$$

① ② ③ ④ ⑤

[A][B][C]

5個の物から[A], [B], [C]
に入れる3個の物を選ぶ

${}_rP_n$ 通り

1の問題(2)

1. 異なる r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.

各箱に入れる物の数を制限せず, 箱内での物の順序を考えない場合

$${}_n\Pi_r = n^r \text{ 通りとなる.}$$

(証明)

r 個ある物の各々に対して n 通りの入れ方が可能である.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥
[A][B][C]

①～⑥に対して3通りの
入れ方がある.

① ② ③
[A][B][C][D][E]

①～③に対して5通りの
入れ方がある.

1の問題(3)

1. 異なる r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.

各箱に入れる物の数を制限せず, 箱内での物の順序を考える場合

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = (n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n$$

(証明)

1番目の物を入れる箱は n 個(通り)ある.

2番目の物を入れるとき, 1番目の物の前／後ろに入れる2通りがあり, 箱が1個増えたことになる. 従って, 2番目の物を入れる箱は仮想的に $n+1$ 個(通り)になる.

3番目の物を入れるときは, 2番目の物の前／後に入れる2通りがあり, 箱の数は仮想的に $n+2$ 個(通り)になる.

以上より, 箱の数は仮想的に n 個から $n+r-1$ 個に増える.

→ r 個の物を順番に $n \sim n+r-1$ 個の箱に入れる数

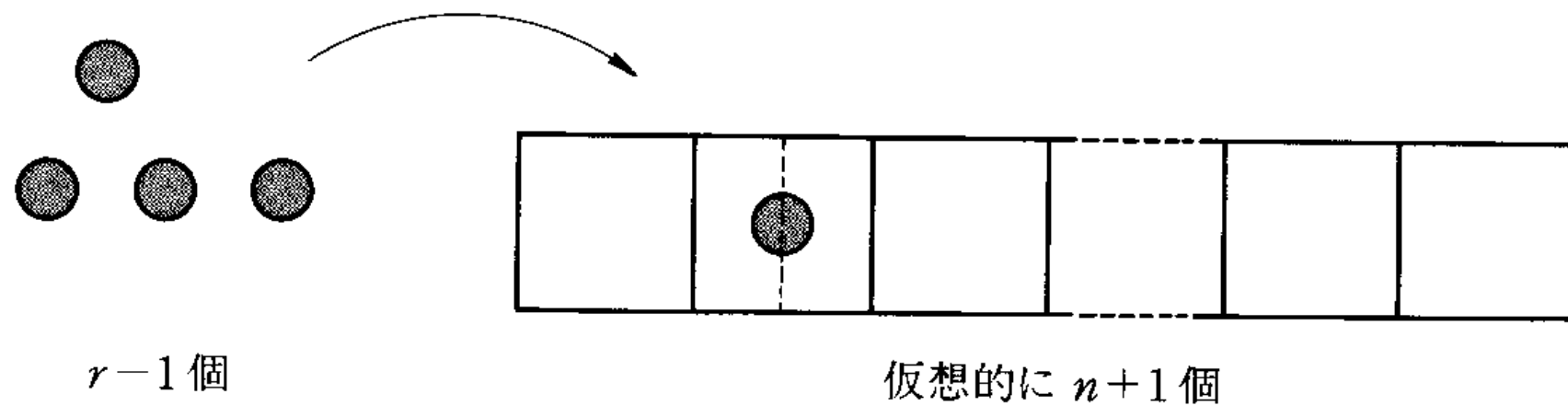


図 2.9 物を 1 個入れた状態

物=5個($r = 5$), 箱=3個($n = 3$)

①②③④⑤ [A] [B] [C]

物=4個($r - 1$), 箱=4個($n + 1$)

②③④⑤ [A1①A2] [B] [C]

物=3個($r - 2$), 箱=5個($n + 2$)

③④⑤ [A1①A2] [B1②B2] [C]

物=2個($r - 4$), 箱=6個($n + 3$)

④⑤ [A1①A21③A22] [B1②B2] [C]

物=1個, 箱=7個($n + 4 = n + r - 1$)

⑤ [A1①A21③A22] [B1②B2] [C1④C2]

2の問題(1)

2. 同じ種類の r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.
各箱に入れる物を高々1個に制限する場合

${}_nC_r$ 通りとなる.

(証明)

n 個の異なる箱から物を入れる r 個の箱を選ぶ
→ n 個の異なる物から r 個を選ぶ組合せの数

2の問題(2)

2. 同じ種類の r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.
各箱に入れる物の数を制限しない場合

${}_nH_r$ 通りとなる.

(証明)

n 個の異なる箱から物を入れる r 個の箱を重複を
許して選ぶ数 $\rightarrow$ 重複組合せ

別の証明

同じ種類の6個($= r$)の物を3個($= n$)の異なる箱に入れる場合を考える.

これを下図のように表すと, 次のような問題になる.



図 2.10 2 個の間仕切りを入れた状態

「8個($= n + r - 1$)の異なる物(位置)から2個($= n - 1$),
あるいは6個($= r$)の物(位置)を選ぶ組合せの数」

$${}_{n+r-1}C_{n-1} = {}_{n+r-1}C_r$$

定理2.10より

$${}_{n+r-1}C_r = {}_nH_r$$

2の問題(3)

2. 同じ種類の r 個の物を異なる n 個の箱に入れる.
各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合($n \leq r$)

$${}_n H_{r-n} = {}_{r-1} C_{n-1} \text{ 通りとなる.}$$

(証明)

1個の物を各箱に入れる→残りの物 $= r - n$ 個
残りの $r - n$ 個の同種の物を n 個の異なる箱に入れる.

n 個の異なる箱から重複を許して $r - n$ 個の箱を選ぶ組合せの数

$${}_n H_{r-n} = {}_{n+(r-n)-1} C_{r-n} = {}_{r-1} C_{r-n} = {}_{r-1} C_{n-1}$$

(参考) 定理2.10及び ${}_a C_b = {}_a C_c, a = b + c$

同じ種類の物が $r = 10$ 個

異なる箱が $n = 4$ 個

○○○○○○○○○○

[], [], [], []

4個の箱に物を1個ずつ入れる.

[○], [○], [○], [○]

残りの $r - n = 6$ 個の物を重複を許して $n = 4$ 個の箱に入れる.

○○○○○○

[○], [○], [○], [○]

n 個の箱から重複を許して $r - n$ 個選ぶ組合せの数

小テストの予想問題

問題1 (pp.23, 定理2.12)

次式において, x^7 の係数を求めよ.

$$(1 + x)^{10}$$

問題2 (p.25, 定理2.13)

次の値を求めよ. 但し, 答えは指数(べき乗)の形で良い.

$${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$$

問題3 (p.25)

5個の異なる物から0個, 2個, 4個取り出す組合せの総和と1個, 3個, 5個取り出す組合せの総和を求め, それらが等しいことを示せ.

問題4 (p.27, 例2.12)

赤いボール3個, 青いボール4個, 黄色いボール2個を
全て並べる順列の数を求めよ.

問題5 (p.28, 例2.13)

赤いボール3個, 青いボール2個, 黄色いボール1個か
ら5個選んで作る順列の数を求めよ.

問題6 (p.28, 系2.1)

赤いボール4個, 青いボール3個, 黄色いボール2個を
9個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法は何通り
あるか.

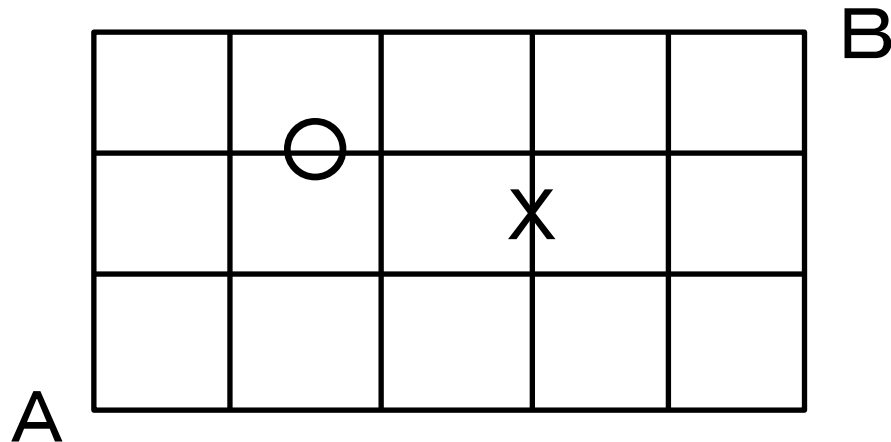
問題7 (pp.30-31, 例2.15)

$(1 + x + x^3 + x^5)^4$ を展開して出来る多項式において,
 x^8 の係数を求めよ.

問題8 (pp.10-11, 例2.9)

次の図は道路マップを表している. 進む方向は右方向
($\rightarrow$)と上方向($\uparrow$)のみである. 以下の問に答えよ.

- (1) A点からB点に行く経路は何通りあるか.
- (2) X印の道路を通らない場合は何通りになるか.
- (3) O印の道路を必ず通る場合は何通りになるか.



問題9 (p.6)

男子4人と女子2人を1列に並べるとき、次の問に答えよ.

- (1) 全部の並べ方は何通りあるか.
- (2) 女子2人が隣り合う並べ方は何通りあるか.
- (3) 女子2人が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

問題10 (pp.20-21)

3種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る.

- (1) 何通りの作り方があるか.
- (2) 3種類から少なくとも1個は入れるとすると、何通りになるか.

問題11 (pp.20-21)

3つの変数からなる次の1次方程式を考える.

$$x + y + z = 6$$

(1) 負でない整数解の組は何通りあるか.

(解の例) $x = 1, y = 3, z = 2, x = 0, y = 5, z = 1$

(2) 正の整数解は何通りあるか.

(解として0は含まない)

問題12 (p.32)

異なる物を異なる箱に入れる問題において、各箱に入れる物を高々1個に制限する場合、以下の問に答えよ.

(1) 3個の異なる物を5個の異なる箱に入れる場合、
何通りの方法があるか.

(2) 5個の異なる物を3個の異なる箱に入れる場合、
何通りの方法があるか.

問題13 (p.33)

異なる5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において、各箱に入れる物の数を制限しない場合、以下の問に答えよ.

- (1) 箱内の物の順序を考えない場合、
何通りの方法があるか.
- (2) 箱内の物の順序を考える場合、
何通りの方法があるか.

問題14 (pp.34-35)

同じ種類の5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において、以下の問に答えよ.

- (1) 各箱に入れる物を高々1個に制限する場合,
何通りの方法があるか.
- (2) 各箱に入れる物の数を制限しない場合,
何通りの方法があるか.
- (3) 各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合,
何通りの方法があるか.

問題15 (pp.7-8)

6人が円形テーブルのまわりに並べられた6個の座席に座る場合の座り方の数を求めよ.

問題16 (pp.16-17)

パスカルの三角形において以下の問に答えよ.

(1) $[x]$, $x=a, b, c, d, e, f$ に入る ${}_nC_r$ を求めよ.
(n, r を求める).

(2) $[x]$, $x=a, b, c, d, e, f$ に入る数字を求めよ.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & [a] & & 1 \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & [b] & & [c] & & 1 \\ & & & & & & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & [d] & & [e] & & [f] & & 1 \end{array}$$