情報数学

中山クラス
第５週

＜講義内容＞
◇演習問題（前回分）の解説
２．１０　物の分配
◇小テスト予想問題

演習問題

問題１
赤いボール6個，青いボール3個から5個選んで出来る順列の数を求めよ．

＜解答例＞
可能な組合せを考える
（方針）赤を多く使う→青を多く使う．
①赤5個，②赤4個＋青1個，③赤3個＋青2個，
④赤2個＋青3個
①～④に独立に多項係数を適用する．
①～④は同時には起こらないので，和法則を適用する．

$$\binom{5}{5}+\binom{5}{4,1}+\binom{5}{3,2}+\binom{5}{2,3}=\frac{5!}{5!}+\frac{5!}{4!\,1!}+\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{2!\,3!}$$
$$=1+5+10+10=26$$

問題２
$(1+x+x^2+x^4)^5$ を展開してできる多項式において，x^6の係数を求めよ．

＜解答例１＞
x^6の構成を考える．（方針）低次→高次の項を使う
① $x\times x\times x\times x\times x^2$　　${}_5C_4\times\ {}_1C_1$
② $x\times x\times x^2\times x^2\times 1$　　${}_5C_2\times{}_3C_2\times\ {}_1C_1$
③ $x\times x\times x^4\times 1\times 1$　　${}_5C_2\times\ {}_3C_1\times\ {}_2C_2$
④ $x^2\times x^2\times x^2\times 1\times 1$　　${}_5C_3\times\ {}_2C_2$
⑤ $x^2\times x^4\times 1\times 1\times 1$　　${}_5C_1\times\ {}_4C_1\times\ {}_3C_3$
x^6の係数＝①＋②＋③＋④＋⑤

$$=\binom{5}{4,1}+\binom{5}{2,2,1}+\binom{5}{2,1,2}+\binom{5}{3,2}+\binom{5}{1,1,3}$$
$$=\frac{5!}{4!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}+\frac{5!}{2!\,1!\,2!}+\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{1!\,1!\,3!}=95$$

＜解答例２＞
x^rを次のような記号で置き換える．
$1\to u,\quad x\to v,\quad x^2\to w,\quad x^4\to y$
x^6の構成を考える．
（方針）x^rの低次の項を多く使う
① $v^4\times w^1$　　${}_5C_4\times\ {}_1C_1$
② $v^2\times w^2\times u^1$　　${}_5C_2\times{}_3C_2\times\ {}_1C_1$
③ $v^2\times y^1\times u^2$　　${}_5C_2\times\ {}_3C_1\times\ {}_2C_2$
④ $w^3\times u^2$　　${}_5C_3\times\ {}_2C_2$
⑤ $w^1\times y^1\times u^3$　　${}_5C_1\times\ {}_4C_1\times\ {}_3C_3$
x^6の係数＝①＋②＋③＋④＋⑤

$$=\binom{5}{4,1}+\binom{5}{2,2,1}+\binom{5}{2,1,2}+\binom{5}{3,2}+\binom{5}{1,1,3}$$
$$=\frac{5!}{4!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}+\frac{5!}{2!\,1!\,2!}+\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{1!\,1!\,3!}=95$$

2.10　物の分配

r個の物を分配してn個の箱に入れる問題を考える．

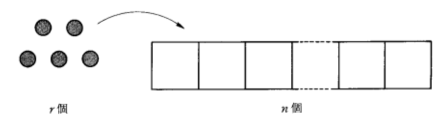


図 2.8　物 の 分 配

＜付加条件による問題の大別＞
1．異なる物を異なる箱に入れる．
2．同じ種類の物を異なる箱に入れる．
3．異なる物を同じ種類の箱に入れる．
4．同じ種類の物を同じ種類の箱に入れる．

1の問題（1）

1．異なるr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物を高々1個に制限する場合

$n>r$のときは　${}_nP_r$通りとなり，$n\le r$のときは　${}_rP_n$通りとなる．但し，どの箱にも入れずに余った物はそのまま残すものとする．

（証明）
$n>r$のときは，箱の数が多いので，物に対して箱を選ぶことが出来る．第1番目の物→n通りの箱，第2番目の物→$n-1$通りの箱を選ぶことが出来る→　${}_nP_r$通りとなる．
$n\le r$のときは，物の数が多い（等しい）ので，箱に対して物を選ぶことが出来る．第1番目の箱→r通りの物，第2番目の箱→$r-1$通りの物を選ぶことが出来る→　${}_rP_n$通り．

$n > r$

① ② ③

[A][B][C][D][E]

5個の箱から①，②，③を入れる3個の箱を選ぶ

${}_nP_r$通り

$n \leq r$

① ② ③ ④ ⑤

[A][B][C]

5個の物から[A]，[B]，[C]に入れる3個の物を選ぶ

${}_rP_n$通り

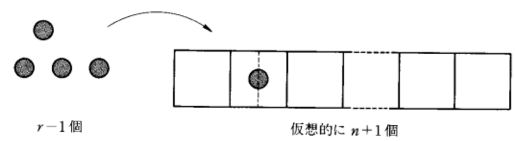


図 2.9 物を 1 個入れた状態

1の問題（2）

1．異なるr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物の数を制限せず，箱内での物の順序を考えない場合

${}_n\Pi_r = n^r$ 通りとなる．

（証明）
r個ある物の各々に対してn通りの入れ方が可能である．

① ② ③ ④ ⑤ ⑥
[A][B][C]

①～⑥に対して3通りの入れ方がある．

① ② ③
[A][B][C][D][E]

①～③に対して5通りの入れ方がある．

物＝5個$(r = 5)$，箱＝3個$(n = 3)$
①②③④⑤ [A] [B] [C]

物＝4個$(r - 1)$，箱＝4個$(n + 1)$
②③④⑤ [A1①A2] [B] [C]

物＝3個$(r - 2)$，箱＝5個$(n + 2)$
③④⑤ [A1①A2] [B1②B2] [C]

物＝2個$(r - 4)$，箱＝6個$(n + 3)$
④⑤ [A1①A21③A22] [B1②B2] [C]

物＝1個，箱＝7個$(n + 4 = n + r - 1)$
⑤ [A1①A21③A22] [B1②B2] [C1④C2]

1の問題（3）

1．異なるr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物の数を制限せず，箱内での物の順序を考える場合

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = (n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)n$$

（証明）
1番目の物を入れる箱はn個（通り）ある．
2番目の物を入れるとき，1番目の物の前／後ろに入れる2通りがあり，箱が1個増えたことになる．従って，2番目の物を入れる箱は仮想的に$n+1$個（通り）になる．
3番目の物を入れるときは，2番目の物の前／後に入れる2通りがあり，箱の数は仮想的に$n+2$個（通り）になる．
以上より，箱の数は仮想的にn個から$n+r-1$個に増える．
→r個の物を順番に$n \sim n+r-1$個の箱に入れる数

2の問題（1）

2．同じ種類のr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物を高々1個に制限する場合

${}_nC_r$通りとなる．

（証明）
n個の異なる箱から物を入れるr個の箱を選ぶ
→n個の異なる物からr個を選ぶ組合せの数

2の問題（2）

2．同じ種類のr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物の数を制限しない場合

$_nH_r$　通りとなる．

（証明）
n個の異なる箱から物を入れるr個の箱を重複を許して選ぶ数→重複組合せ

同じ種類の物が$r = 10$個
異なる箱が$n = 4$個
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
[ ], [ ], [ ], [ ]

4個の箱に物を1個ずつ入れる．
[〇], [〇], [〇], [〇]

残りの$r - n = 6$個の物を重複を許して$n = 4$個の箱に入れる．
〇〇〇〇〇〇
[〇], [〇], [〇], [〇]

n個の箱から重複を許して$r - n$個選ぶ組合せの数

別の証明

同じ種類の6個$(= r)$の物を3個$(= n)$の異なる箱に入れる場合を考える．
これを下図のように表すと，次のような問題になる．

図 2.10　2 個の間仕切りを入れた状態

「8個$(= n + r - 1)$の異なる物（位置）から2個$(= n - 1)$，あるいは6個$(= r)$の物（位置）を選ぶ組合せの数」

$$_{n+r-1}C_{n-1} = _{n+r-1}C_r$$

定理2.10より

$$_{n+r-1}C_r = _nH_r$$

小テストの予想問題

問題1（pp.23，定理2.12）
次式において，x^7の係数を求めよ．
$$(1 + x)^{10}$$

問題2（p.25，定理2.13）
次の値を求めよ．但し，答えは指数（べき乗）の形で良い．
$$_5C_0 + _5C_1 + _5C_2 + _5C_3 + _5C_4 + _5C_5$$

問題3（p.25）
5個の異なる物から0個，2個，4個取り出す組合せの総和と1個，3個，5個取り出す組合せの総和を求め，それらが等しいことを示せ．

2の問題（3）

2．同じ種類のr個の物を異なるn個の箱に入れる．
各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合$(n \le r)$

$_nH_{r-n} = _{r-1}C_{n-1}$　通りとなる．

（証明）
1個の物を各箱に入れる→残りの物$= r - n$個
残りの$r - n$個の同種の物をn個の異なる箱に入れる．

n個の異なる箱から重複を許して$r - n$個の箱を選ぶ組合せの数

$$_nH_{r-n} = _{n+(r-n)-1}C_{r-n} = _{r-1}C_{r-n} = _{r-1}C_{n-1}$$

（参考）定理2．10及び　$_aC_b = _aC_c$，$a = b + c$

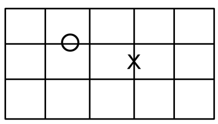
問題4（p.27，例2.12）
赤いボール3個，青いボール4個，黄色いボール2個を全て並べる順列の数を求めよ．

問題5（p.28，例2.13）
赤いボール3個，青いボール2個，黄色いボール1個から5個選んで作る順列の数を求めよ．

問題6（p.28，系2.1）
赤いボール4個，青いボール3個，黄色いボール2個を9個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法は何通りあるか．

問題7（pp.30-31，例2.15）
$(1+x+x^3+x^5)^4$を展開して出来る多項式において，x^8の係数を求めよ．

問題８（pp.10-11，例2.9）
次の図は道路マップを表している．進む方向は右方向（→）と上方向（↑）のみである．以下の問に答えよ．
（1）Ａ点からＢ点に行く経路は何通りあるか．
（2）X印の道路を通らない場合は何通りになるか．
（3）〇印の道路を必ず通る場合は何通りになるか．



問題１３（p.33）
異なる5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において，各箱に入れる物の数を制限しない場合，以下の問に答えよ．

（1）箱内の物の順序を考えない場合，
何通りの方法があるか．
（2）箱内の物の順序を考える場合，
何通りの方法があるか．

問題９（p.6）
男子４人と女子２人を１列に並べるとき，次の問に答えよ．
（1）全部の並べ方は何通りあるか．
（2）女子２人が隣り合う並べ方は何通りあるか．
（3）女子２人が隣り合わない並べ方は何通りあるか．

問題１０（pp.20-21）
３種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る．
（1）何通りの作り方があるか．
（2）３種類から少なくとも1個は入れるとすると，何通りになるか．

問題１４（pp.34-35）
同じ種類の5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において，以下の問に答えよ．

（1）各箱に入れる物を高々１個に制限する場合，
何通りの方法があるか．
（2）各箱に入れる物の数を制限しない場合，
何通りの方法があるか．
（3）各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合，
何通りの方法があるか．

問題１１（pp.20-21）
3つの変数からなる次の1次方程式を考える．
$$x+y+z=6$$
（1）負でない整数解の組は何通りあるか．
（解の例）$x=1, y=3, z=2,\ x=0, y=5, z=1$
（2）正の整数解は何通りあるか．
（解として0は含まない）

問題１２（p.32）
異なる物を異なる箱に入れる問題において，各箱に入れる物を高々１個に制限する場合，以下の問に答えよ．
（1）3個の異なる物を5個の異なる箱に入れる場合，
何通りの方法があるか．
（2）5個の異なる物を3個の異なる箱に入れる場合，
何通りの方法があるか．

問題１５（pp.7-8）
６人が円形テーブルのまわりに並べられた6個の座席に座る場合の座り方の数を求めよ．

問題１６（pp.16-17）
パスカルの三角形において以下の問に答えよ．
（1）[x], x=a, b, c, d, e, fに入る ${}_nC_r$を求めよ．
（n, rを求める）．
（2）[x], x=a, b, c, d, e, fに入る数字を求めよ．

1
1　1
1　[a]　1
1　[b]　[c]　1
1　[d]　[e]　[f]　1