

情報数学

中山クラス 第6週

<今日の内容>

◇小テスト

◇第4章 漸化式

4. 1 はじめに

4. 2 漸化式の作成

4. 3 漸化式の種類と方法

4. 4 発見的解法

小テスト

◆試験時間: 約40分

◆試験範囲: 教科書第2章(2.1～2.10)

◆持ち込み: 筆記用具, 時計, 学生証, ティッシュ

試験に関する注意

- ◆ 横の席は一つ空けてください.
- ◆ 荷物はまとめて机の横や教室の棚に置いてください.
教科書や資料が見えないようにしてください.
- ◆ 携帯電話はアラームを解除して、電源を切ってください.
呼び出し音が鳴るのは試験妨害になります.
切るための操作は不正行為の疑いがかかります.

問題用紙, 答案用紙

- ◆問題用紙: 1枚, 答案用紙: 2枚
- ◆「はじめ」の合図があるまで問題用紙は伏せて下さい.
- ◆問題用紙と答案用紙に「クラス番号」と「名前」を記入して下さい.
- ◆問題用紙と答案用紙を回収します.
最後尾の席の学生が前のほうに回収して教員に渡してください.

不正行為について

不正行為と疑われそうなことはしない.

- ・ 他の学生から見えるように答案用紙を置かないこと.
- ・ ポケットからティッシュやハンケチを出す場合は挙手して、教員の許可を得ること.
- ・ 鉛筆や消しゴムを落とした場合は自分で拾わず挙手すること.
- ・ 鞆の中の教科書やノートの内容が見えないこと.
- ・ 机の中に何も入れないこと. 自分のものでないものが入っている場合は、一旦、自分の鞆にしまい、試験終了後に机の中に戻す.

第4章 漸化式

4.1 はじめに

数列：何らかの規則で作られた数の列

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ a_n ：一般項

a_n を表す一般式(n の関数)

→ n に数値を代入して計算出来る

漸化式： a_n とその前後のいくつかの項(隣接項)

$a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{n+2}$ の間に成り立つ関係

a_0, a_1 等から始めて a_n が順次計算できる

本章の目的：漸化式から a_n の一般式を求める.

漸化式は差分方程式と見なせる.
差分方程式の解法

定数係数線型漸化式に限定→一般的な解法を学ぶ

一般解 = 同次解 + 特解

同次解 特性方程式を用いて系統的に求められる
 解は未定係数を含む

特解 発見的に求める

一般解も未定係数を含む→境界条件により確定する.

4.2 漸化式の作成

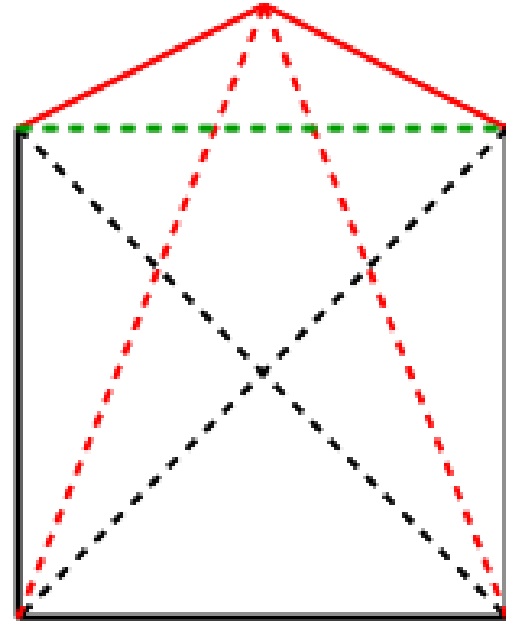
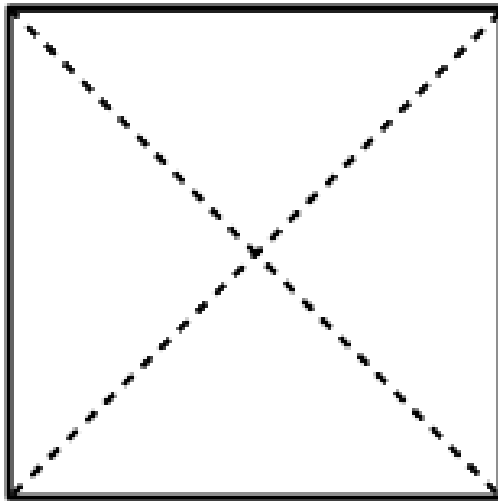
例4.1

正多角形の対角線の数を求める問題

正 n 角形の対角線数を f_n とする.

正四角形の対角線数は2本である $f_4 = 2$.

これに頂点を1個追加して正五角形にする $f_5 = ?$.



- 新しい頂点と元の頂点を結ぶ線の数 $= 4 (= n)$
- そのうち2本は辺になる.
- これまで辺であった1本が対角線になる.

以上より,

$$f_5 = f_4 + (4 - 2) + 1$$

一般式では

$$f_n = f_{n-1} + [(n - 1) - 2] + 1$$

従って, $f_n = f_{n-1} + n - 2 \quad (4 \leq n) \quad \cdots \text{漸化式}$

正三角形は対角線を持たないので

$$f_3 = 0 \quad \cdots \text{境界条件}$$

差分方程式

$$f_n = f_{n-1} + n - 2 \quad (4 \leq n)$$

を境界条件

$$f_3 = 0$$

を用いて解く(解法は後で説明)

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \quad (= {}_nC_2 - n)$$

これにより正多角形の対角線の数が次のように求まる.

$$f_3 = 0, f_4 = 2, f_5 = 5, f_6 = 9, f_7 = 14$$

4.3 漸化式の種類と解法

漸化式の分類

◇線型漸化式

- 定数係数の線型漸化式
- 非定数係数の線型漸化式

◇非線型漸化式

定係数線型漸化式

定係数 $C_n, C_{n-1}, \dots, C_k$ 付きの項の和(項の1次結合)

$$C_n f_n + C_{n-1} f_{n-1} + \dots + C_k f_k = u(n)$$

同次解(f_n^*): $u(n) = 0$ に対する一般解

$$C_n f_n^* + C_{n-1} f_{n-1}^* + \dots + C_k f_k^* = 0$$

特解(f_n^{**}): 漸化式に対する一つの解($u(n)$ はそのまま)

$$C_n f_n^{**} + C_{n-1} f_{n-1}^{**} + \dots + C_k f_k^{**} = u(n)$$

漸化式の一般解 $= f_n^* + f_n^{**}$

4.4 発見的解法

例4.2

$$g_n = 3g_{n-1} - 2g_{n-2} \quad (n \geq 2), g_0 = 1, g_1 = 2$$

次のように変形する.

$$g_n - g_{n-1} = 2(g_{n-1} - g_{n-2})$$

$g_n - g_{n-1}$ は等比数列 (公比 = 2) である.

$$g_1 - g_0 = 1$$

$$g_2 - g_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$g_3 - g_2 = 2 \times 2 = 2^2$$

...

$$g_n - g_{n-1} = 2^{n-1}, n \geq 1$$

次のような式を考える.

$$\begin{aligned} g_n - g_0 &= (g_n - g_{n-1}) + (g_{n-1} - g_{n-2}) + \\ &\quad \cdots + (g_1 - g_0) \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

これより,

$$g_n = 2^n - 1 + g_0 = 2^n$$

(参考) 等比数列の和

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = r^0 \frac{1 - r^N}{1 - r}, \quad r: \text{公比}, N: \text{項数}, r^0: \text{初項}$$