情報数学

中山クラス
第6週

＜今日の内容＞
◇小テスト
◇第4章　漸化式
4．1　はじめに
4．2　漸化式の作成
4．3　漸化式の種類と方法
4．4　発見的解法

問題用紙，答案用紙

◆問題用紙：1枚，答案用紙：2枚

◆「はじめ」の合図があるまで問題用紙は伏せて下さい．

◆問題用紙と答案用紙に「クラス番号」と「名前」を記入して下さい．

◆問題用紙と答案用紙を回収します．
最後尾の席の学生が前のほうに回収して教員に渡してください．

小テスト

◆試験時間：約40分

◆試験範囲：教科書第2章（2.1～2.10）

◆持ち込み：筆記用具，時計，学生証，ティッシュ

不正行為について

不正行為と疑われそうなことはしない．

- 他の学生から見えるように答案用紙を置かないこと．
- ポケットからテッシュやハンケチを出す場合は挙手して，教員の許可を得ること．
- 鉛筆や消しゴムを落とした場合は自分で拾わず挙手すること．
- 鞄の中の教科書やノートの内容が見えないこと．
- 机の中に何も入れないこと．自分のものでないものが入っている場合は，一旦，自分の鞄にしまい，試験終了後に机の中に戻す．

試験に関する注意

◆ 横の席は一つ空けてください．

◆ 荷物はまとめて机の横や教室の棚に置いてください．
教科書や資料が見えないようにしてください．

◆ 携帯電話はアラームを解除して，電源を切ってください．
呼び出し音が鳴るのは試験妨害になります．
切るための操作は不正行為の疑いがかかります．

第4章　漸化式

4.1　はじめに

数列：何らかの規則で作られた数の列
$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$　a_n：一般項

a_nを表す一般式（nの関数）
→nに数値を代入して計算出来る

漸化式：a_nとその前後のいくつかの項（隣接項）
$a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{n+2}$の間に成り立つ関係
a_0, a_1等から始めてa_nが順次計算できる

本章の目的：漸化式からa_nの一般式を求める．

漸化式は差分方程式と見なせる.
差分方程式の解法

定数係数線型漸化式に限定→一般的な解法を学ぶ

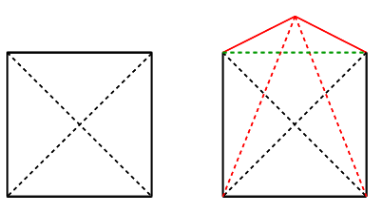
一般解＝同次解＋特解
同次解　特性方程式を用いて系統的に求められる
　　　　解は未定係数を含む
特解　　発見的に求める

一般解も未定係数を含む→境界条件により確定する.

差分方程式
$$f_n = f_{n-1} + n - 2 \quad (4 \leq n)$$
を境界条件
$$f_3 = 0$$
を用いて解く(解法は後で説明)
$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \quad (= {}_nC_2 - n)$$
これにより正多角形の対角線の数が次のように求まる.
$$f_3 = 0,\ f_4 = 2,\ f_5 = 5,\ f_6 = 9,\ f_7 = 14$$

4.2　漸化式の作成

例4.1
正多角形の対角線の数を求める問題
正n角形の対角線の数をf_nとする.
正四角形の対角線の数は2本である$f_4 = 2$.
これに頂点を1個追加して正五角形にする$f_5 = ?$.



4.3　漸化式の種類と解法

漸化式の分類

◇線型漸化式
　・定数係数の線型漸化式
　・非定数係数の線型漸化式

◇非線型漸化式

- 新しい頂点と元の頂点を結ぶ線の数＝4$(= n)$
- そのうち2本は辺になる.
- これまで辺であった1本が対角線になる.

以上より,
$$f_5 = f_4 + (4 - 2) + 1$$
一般式では
$$f_n = f_{n-1} + [(n - 1) - 2] + 1$$

従って,　$f_n = f_{n-1} + n - 2 \quad (4 \leq n)$　･･･漸化式

正三角形は対角線を持たないので
$f_3 = 0$　･･･境界条件

定係数線型漸化式

定係数$C_n, C_{n-1}, \cdots, C_k$付きの項の和(項の1次結合)
$$C_n f_n + C_{n-1} f_{n-1} + \cdots + C_k f_k = u(n)$$

同次解(f_n^*): $u(n) = 0$に対する一般解
$$C_n f_n^* + C_{n-1} f_{n-1}^* + \cdots + C_k f_k^* = 0$$

特解(f_n^{**}):　漸化式に対する一つの解($u(n)$はそのまま)
$$C_n f_n^{**} + C_{n-1} f_{n-1}^{**} + \cdots + C_k f_k^{**} = u(n)$$

漸化式の一般解$= f_n^* + f_n^{**}$

4.4 発見的解法

例4.2

$$g_n = 3g_{n-1} - 2g_{n-2} \quad (n \geq 2), g_0 = 1, g_1 = 2$$

次のように変形する.

$$g_n - g_{n-1} = 2(g_{n-1} - g_{n-2})$$

$g_n - g_{n-1}$は等比数列(公比$= 2$)である.

$$g_1 - g_0 = 1$$
$$g_2 - g_1 = 2 \times 1 = 2$$
$$g_3 - g_2 = 2 \times 2 = 2^2$$
$$\cdots$$
$$g_n - g_{n-1} = 2^{n-1}, n \geq 1$$

次のような式を考える.

$$g_n - g_0 = (g_n - g_{n-1}) + (g_{n-1} - g_{n-2}) + \cdots + (g_1 - g_0)$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

これより,

$$g_n = 2^n - 1 + g_0 = 2^n$$

(参考)等比数列の和

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = r^0 \frac{1 - r^N}{1 - r}, \quad r:\text{公比}, \ N:\text{項数}, \ r^0:\text{初項}$$