情報数学

中山クラス
第7週（11/14）

＜今日の内容＞

◇小テストの解説
◇第4章　漸化式
　　4.5節　定数係数線型漸化式の一般的解法
　　4.6節　自明でない特解の求め方
◇演習問題

4.5 定数係数線型漸化式の一般的解法

[例4.3]

$$g_n = 3g_{n-1} - 2g_{n-2}, \qquad n \geq 2$$
$$g_0 = 1, \qquad g_1 = 2$$

$g_n = 0$が特解になるので，同次解が一般解となる．
$g_n = K\alpha^n$ (K, αは定数) と仮定して，漸化式に代入する．

$$K\alpha^n = 3K\alpha^{n-1} - 2K\alpha^{n-2}$$

両辺を$K\alpha^{n-2}$で割る．

$$\alpha^2 = 3\alpha - 2 \quad \cdots \quad \text{漸化式の特性方程式}$$

これを解いてαを求める．

$$\alpha = 1, 2$$

これを用いて同次解は次のように表される.

$$g_n = K_1 \cdot 2^n + K_2 \cdot 1^n = K_1 \cdot 2^n + K_2$$

未定係数を境界条件より求める.

$$g_0 = K_1 + K_2 = 1$$
$$g_1 = 2K_1 + K_2 = 2$$

これより,

$$K_1 = 1, K_2 = 0$$

これを用いて同次解(一般解)が求まる.

$$g_n = 2^n$$

［例4.4］ フィボナッチ数列

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 2$$
$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1$$

$f_n = 0$が特解→同次解＝一般解

$g_n = K\alpha^n$と仮定して，特性方程式を求める.

$$K\alpha^n = K\alpha^{n-1} + K\alpha^{n-2}$$
$$\alpha^2 = \alpha + 1 \quad \cdots \quad \text{漸化式の特性方程式}$$
$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

一般解（未定係数）

$$f_n = K_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + K_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

境界条件

$$f_0 = K_1 + K_2 = 1$$

$$f_1 = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

より

$$K_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad K_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

一般解（最終）

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

例4.7

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

$a_n = 0$が特解→同次解＝一般解

＜同次解＝一般解＞

$a_n = K\alpha^n$ と仮定して，漸化式に代入し特性方程式を得る.

$$K\alpha^n = 2K\alpha^{n-1} - 2K\alpha^{n-2}$$
$$\alpha^2 = 2\alpha - 2 \quad \cdots \quad \text{特性方程式}$$

これを解いて，

$$\alpha = 1 + i, 1 - i$$

一般解(未定係数)

$$a_n = K_1(1+i)^n + K_2(1-i)^n$$

オイラー公式

$$1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$$

この関係を用いて一般解を表す.

$$a_n = K_1\left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}} + K_2\left(\sqrt{2}\right)^n e^{-\frac{in\pi}{4}}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \left\{\underline{(K_1 + K_2)}\cos\frac{n\pi}{4} + i\underline{(K_1 - K_2)}\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$$

＜境界条件＞

$$a_0 = K_1 + K_2 = 1$$

$$a_1 = \sqrt{2}\left\{\frac{K_1 + K_2}{\sqrt{2}} + i\frac{K_1 - K_2}{\sqrt{2}}\right\} = 2$$

より,

$$\underline{K_1 + K_2} = 1,\ \underline{K_1 - K_2} = -i$$

＜一般解（最終）＞

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left\{\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right\}$$

＜別の方法＞

$$a_n = K_1(1+i)^n + K_2(1-i)^n$$

$$a_0 = K_1(1+i)^0 + K_2(1-i)^0$$

$$= K_1 + K_2 = 1 \ \cdots \ (1)$$

$$a_1 = K_1(1+i)^1 + K_2(1-i)^1$$

$$= (K_1 + K_2) + i(K_1 - K_2) = 2 \ \cdots \ (2)$$

式(1)，(2)より

$$i(K_1 - K_2) = 1 \ \rightarrow \ K_1 - K_2 = -i \ \cdots \ (3)$$

式(1)，(3)が同じ条件となる。

4.6　自明でない特解の求め方

［例4.9］

$$a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3$$
$$a_0 = 1, a_1 = 3$$

＜同次解＞

漸化式の右辺＝0として同次解を求める.

$a_n = K\alpha^n$と仮定して特性方程式を求める.

$$\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 4, 1$$

同次解は次のようになる.

$$\alpha_n = A_1 \cdot 4^n + A_2 \cdot 1^n$$

＜特解＞

$a_n = Bn + C$であると仮定して，元の漸化式を満たすかどうか調べる．漸化式に代入する

$$a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = (Bn + C) - 5\{B(n-1) + C\}$$
$$+4\{B(n-2) + C\} = -3B \to 3$$

従って，$-3B = 3$すなわち$B = -1$であれば，漸化式を満たす．Cについては条件がないので任意の値でよい

$$C = 0$$

以上より，特解は次のようになる．

$$a_n = -n$$

＜一般解(未定係数)＞

一般解＝同次解＋特解より

$$a_n = A_1 \cdot 4^n + A_2 - n$$

境界条件よりA_1, A_2を決める.

$$a_0 = A_1 + A_2 = 1$$
$$a_1 = 4A_1 + A_2 - 1 = 3$$

より, $A_1 = 1, A_2 = 0$

＜一般解(最終)＞

$$a_n = 4^n - n$$

［例4.10］

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3^n, \qquad n \geq 2$$
$$a_0 = 10, \qquad a_1 = 14$$

＜同次解＞

$a_n = A\alpha^n$と仮定して特性方程式を求める.

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 2, 1$$

同次解は次のようになる.

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 1^n = A_1 \cdot 2^n + A_2$$

＜特解＞

漸化式の右辺3^nを考慮して，$a_n = B \cdot 3^n$と仮定し，漸化式に代入する.

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$$
$$= B \cdot 3^n - 3B \cdot 3^{n-1} + 2B \cdot 3^{n-2}$$
$$= 2B \cdot 3^{n-2} = 3^n$$

従って,

$$2B = 3^2 = 9 \to B = 9/2$$

であれば特解となる.

$$a_n = \frac{9}{2} 3^n = \frac{3^{n+2}}{2}$$

＜一般解（未定係数）＞

同次解＋特解より

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 + \frac{3^{n+2}}{2}$$

＜境界条件＞

$$a_0 = A_1 + A_2 + \frac{9}{2} = 10$$

$$a_1 = 2A_1 + A_2 + \frac{27}{2} = 14$$

より

$$A_1 = -5, A_2 = \frac{21}{2}$$

＜一般解（最終）＞

$$a_n = -5 \cdot 2^n + \frac{21}{2} + \frac{3^{n+2}}{2}$$

［例4.11］

$$f_n - f_{n-1} = n - 2, \qquad n \geq 4$$

$$f_3 = 0$$

＜同次解＞

$$f_n = K\alpha^n$$

と仮定して特性方程式を求める.

$$K\alpha^n - K\alpha^{n-1} = 0$$

$$\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

同次解は次のようになる.

$$a_n = K \cdot 1^n = K$$

＜特解＞

$f_n = An^2 + Bn + C$と仮定して漸化式に代入する.

$$
\begin{aligned}
&f_n - f_{n-1} \\
&= (An^2 + Bn + C) - \{A(n-1)^2 + B(n-1) + C\} \\
&= 2An - A + B = n - 2
\end{aligned}
$$

従って,

$$2A = 1, \qquad -A + B = -2$$

Cは任意でよいので$C = 0$とする. これらより,

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{2}$$

特解は次のようになる.

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

＜一般解（未定係数）＞

同次解＋特解より

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + K$$

＜境界条件＞

$$f_3 = \frac{1}{2}3^2 - \frac{3}{2}3 + K = 0$$

より

$$K = 0$$

＜一般解（最終）＞

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

演習問題

次の漸化式の解を求めよ.

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2, n \geq 2$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2$$