

情報数学

中山クラス
第7週 (11/14)

<今日の内容>

- ◇小テストの解説
- ◇第4章 漸化式
 - 4.5節 定数係数線型漸化式の一般的解法
 - 4.6節 自明でない特解の求め方
- ◇演習問題

[例4.4] フィボナッチ数列

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1$$

$f_n = 0$ が特解→同次解＝一般解

$g_n = K\alpha^n$ と仮定して、特性方程式を求める.

$$K\alpha^n = K\alpha^{n-1} + K\alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \quad \cdots \quad \text{漸化式の特性方程式}$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

一般解(未定係数)

$$f_n = K_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + K_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

4.5 定数係数線型漸化式の一般的解法

[例4.3]

$$g_n = 3g_{n-1} - 2g_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 2$$

$g_n = 0$ が特解になるので、同次解が一般解となる.

$g_n = K\alpha^n$ (K, α は定数) と仮定して、漸化式に代入する.

$$K\alpha^n = 3K\alpha^{n-1} - 2K\alpha^{n-2}$$

両辺を $K\alpha^{n-2}$ で割る.

$$\alpha^2 = 3\alpha - 2 \quad \cdots \quad \text{漸化式の特性方程式}$$

これを解いて α を求める.

$$\alpha = 1, 2$$

境界条件

$$f_0 = K_1 + K_2 = 1$$

$$f_1 = K_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + K_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

より

$$K_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad K_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

一般解(最終)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

これを用いて同次解は次のように表される.

$$g_n = K_1 \cdot 2^n + K_2 \cdot 1^n = K_1 \cdot 2^n + K_2$$

未定係数を境界条件より求める.

$$g_0 = K_1 + K_2 = 1$$

$$g_1 = 2K_1 + K_2 = 2$$

これより,

$$K_1 = 1, K_2 = 0$$

これを用いて同次解(一般解)が求まる.

$$g_n = 2^n$$

例4.7

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

$a_n = 0$ が特解→同次解＝一般解

<同次解＝一般解>

$a_n = K\alpha^n$ と仮定して、漸化式に代入し特性方程式を得る.

$$K\alpha^n = 2K\alpha^{n-1} - 2K\alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = 2\alpha - 2 \quad \cdots \quad \text{特性方程式}$$

これを解いて,

$$\alpha = 1 + i, 1 - i$$

一般解(未定係数)

$$a_n = K_1(1 + i)^n + K_2(1 - i)^n$$

オイラー公式

$$1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$$

この関係を用いて一般解を表す.

$$\begin{aligned} a_n &= K_1 (\sqrt{2})^n e^{\frac{in\pi}{4}} + K_2 (\sqrt{2})^n e^{-\frac{in\pi}{4}} \\ &= (\sqrt{2})^n \left\{ \underline{(K_1 + K_2)} \cos \frac{n\pi}{4} + i \underline{(K_1 - K_2)} \sin \frac{n\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

<境界条件>

$$\begin{aligned} a_0 &= K_1 + K_2 = 1 \\ a_1 &= \sqrt{2} \left\{ \frac{K_1 + K_2}{\sqrt{2}} + i \frac{K_1 - K_2}{\sqrt{2}} \right\} = 2 \end{aligned}$$

より,

$$\underline{K_1 + K_2 = 1}, \underline{K_1 - K_2 = -i}$$

<特解>

$a_n = Bn + C$ であると仮定して, 元の漸化式を満たすかどうか調べる. 漸化式に代入する

$$a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} = (Bn + C) - 5\{B(n-1) + C\} + 4\{B(n-2) + C\} = \underline{-3B \rightarrow 3}$$

従って, $\underline{-3B = 3}$ すなわち $B = -1$ であれば, 漸化式を満たす. C については条件がないので任意の値でよい
 $C = 0$

以上より, 特解は次のようになる.

$$a_n = -n$$

<一般解(最終)>

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left\{ \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right\}$$

<別の方法>

$$\begin{aligned} a_n &= K_1 (1+i)^n + K_2 (1-i)^n \\ a_0 &= K_1 (1+i)^0 + K_2 (1-i)^0 \\ &= K_1 + K_2 = 1 \cdots (1) \\ a_1 &= K_1 (1+i)^1 + K_2 (1-i)^1 \\ &= (K_1 + K_2) + i(K_1 - K_2) = 2 \cdots (2) \end{aligned}$$

式(1), (2)より

$$i(K_1 - K_2) = 1 \rightarrow K_1 - K_2 = -i \cdots (3)$$

式(1), (3)が同じ条件となる.

<一般解(未定係数)>

一般解 = 同次解 + 特解より

$$a_n = A_1 \cdot 4^n + A_2 - n$$

境界条件より A_1, A_2 を決める.

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1 + A_2 = 1 \\ a_1 &= 4A_1 + A_2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

より, $A_1 = 1, A_2 = 0$

<一般解(最終)>

$$a_n = 4^n - n$$

4.6 自明でない特解の求め方

[例4.9]

$$\begin{aligned} a_n - 5a_{n-1} + 4a_{n-2} &= 3 \\ a_0 &= 1, a_1 = 3 \end{aligned}$$

<同次解>

漸化式の右辺=0として同次解を求める.

$a_n = K\alpha^n$ と仮定して特性方程式を求める.

$$\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 4, 1$$

同次解は次のようになる.

$$a_n = A_1 \cdot 4^n + A_2 \cdot 1^n$$

[例4.10]

$$\begin{aligned} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} &= 3^n, \quad n \geq 2 \\ a_0 &= 10, \quad a_1 = 14 \end{aligned}$$

<同次解>

$a_n = A\alpha^n$ と仮定して特性方程式を求める.

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 2, 1$$

同次解は次のようになる.

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 1^n = A_1 \cdot 2^n + A_2$$

<特解>

漸化式の右辺 3^n を考慮して, $a_n = B \cdot 3^n$ と仮定し, 漸化式に代入する.

$$\begin{aligned} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} &= B \cdot 3^n - 3B \cdot 3^{n-1} + 2B \cdot 3^{n-2} \\ &= 2B \cdot 3^{n-2} = 3^n \end{aligned}$$

従って,

$$2B = 3^2 = 9 \rightarrow B = 9/2$$

であれば特解となる.

$$a_n = \frac{9}{2} 3^n = \frac{3^{n+2}}{2}$$

<特解>

$f_n = An^2 + Bn + C$ と仮定して漸化式に代入する.

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= (An^2 + Bn + C) - \{A(n-1)^2 + B(n-1) + C\} \\ &= 2An - A + B = n - 2 \end{aligned}$$

従って,

$$2A = 1, \quad -A + B = -2$$

C は任意でよいので $C = 0$ とする. これらより,

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{2}$$

特解は次のようになる.

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

<一般解(未定係数)>

同次解+特解より

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 + \frac{3^{n+2}}{2}$$

<境界条件>

$$a_0 = A_1 + A_2 + \frac{9}{2} = 10$$

$$a_1 = 2A_1 + A_2 + \frac{27}{2} = 14$$

より

$$A_1 = -5, A_2 = \frac{21}{2}$$

<一般解(最終)>

$$a_n = -5 \cdot 2^n + \frac{21}{2} + \frac{3^{n+2}}{2}$$

<一般解(未定係数)>

同次解+特解より

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + K$$

<境界条件>

$$f_3 = \frac{1}{2}3^2 - \frac{3}{2}3 + K = 0$$

より

$$K = 0$$

<一般解(最終)>

$$f_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

[例4.11]

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= n - 2, & n \geq 4 \\ f_3 &= 0 \end{aligned}$$

<同次解>

$$f_n = K\alpha^n$$

と仮定して特性方程式を求める.

$$\begin{aligned} K\alpha^n - K\alpha^{n-1} &= 0 \\ \alpha - 1 &= 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

同次解は次のようになる.

$$a_n = K \cdot 1^n = K$$

演習問題

次の漸化式の解を求めよ.

$$\begin{aligned} a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} &= 2, n \geq 2 \\ a_0 &= 1, a_1 = 2 \end{aligned}$$