

情報数学

中山クラス 第8週

<今日の内容>

◇前回の演習問題解説

◇総合力学習

確率に関する問題をグループで検討, 発表

演習問題(前回)の解説

<問題>

次の漸化式の解を求めよ.

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2, n \geq 2$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

<解答例>

まず, 同次解を求める. $a_n = A\alpha^n$ と置き, 漸化式 (右辺=0) に代入して, 次の特性方程式を得る.

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 3, 1$$

を得る. 従って, 同次解の一般式は

$$a_n = A_1 3^n + A_2 1^n = A_1 3^n + A_2$$

次に、特解を求める.

漸化式の右辺が定数であるから、特解を $a_n = Bn + C$ とし、漸化式に代入して、 B, C を求める.

$$\begin{aligned} & a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ &= (Bn + C) - 4[B(n-1) + C] + 3[B(n-2) + C] \\ &= -2B = 2 \end{aligned}$$

これより、 $B = -1, C = 0$ となる.

同次解 + 特解は次のようになる.

$$a_n = A_1 3^n + A_2 - n$$

最後に境界条件より

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1 + A_2 = 1 \\ a_1 &= 3A_1 + A_2 - 1 = 2 \end{aligned}$$

これより、 $A_1 = 1, A_2 = 0$.

一般解(最終)は次のように求まる.

$$a_n = 3^n - n$$

総合力学習の進め方

＜グループ分け＞

1グループ当たり7名程度とする(6～7名)

現在, 着席している席の近くでグループを構成する.
はみ出る場合は席を移動する.

＜課題＞

課題を2題を出題する.

＜検討＞

各グループ内で課題を検討し, 意見を集約する.

＜結果の発表 & 質疑＞

各グループで代表者が検討結果とその理由を発表する.
発表内容に関して, 他のグループから質問を受け付ける.

＜教員からの解説＞

確率の考え方, 計算方法について

総合力演習課題(1)

宝くじを当てた人が県内の3大学(A大学, B大学, C大学)のどれか1つを無作為抽選で選び, その大学に全額寄付することを決めた. 抽選に立ち会った証人はその結果を知っているが, 各大学にはまだ通知されていない.

A大学の関係者が証人に対して「B大学かC大学のいずれかは落選するのだから, どちらが落選したか教えてほしい」と依頼し, 証人は「B大学が落選した」と教えた.

そこで, A大学の関係者は次のように考えた.

「はじめは3大学から選ぶので, 当選確率は $1/3$ であったが, 証人から情報を得た後は, 2大学から選ぶことになるから当選確率は $1/2$ になる」

(問題)

A大学の関係者の考え方は正しいか? 間違っているか?
結論とその根拠を述べよ.

グループ討議の結果

第1グループ

第6グループ

第2グループ

第7グループ

第3グループ

第8グループ

第4グループ

第9グループ

第5グループ

第10グループ

解説～確率の考え方～

<結論>

A大学の考えは間違っており、当選の確率は変わらず $1/3$ である.

<根拠>

3大学から無作為抽出した段階で各大学が当選する確率は $1/3$ であると確定している.

「B大学が落選した」と知らされたが、この段階でA大学とC大学の2校のみで無作為抽選が行われたわけではないので、A大学の当選確率は変化しない.

<参考>

「B大学が落選した」というのは結果であり、当選確率には影響しない.

「当選の可能性はA大学とC大学しかないので、確率は $1/2$ である」という考えは、「B大学を除外してA大学とC大学だけで抽選を行うことを想定」している. しかし、「無作為抽選においては3大学は同等に当選の可能性を有しており」、B大学を除外することは想定していない

総合力演習課題(2)

あるTV番組において、くじ引きにより海外旅行をプレゼントしている。4つの箱があり、その一つに海外旅行券が入っており、残り3個の箱は空である。

A君が一つの箱を選んだとき、司会者が残りの3個の箱から1個を選び、それが空箱であることを教えてくれた。A君は1回だけ箱を選び直すことが出来るものとする。

(問題)

①A君が最初に選んだ箱を変更しない場合

②A君が箱を残りの2個から選び直した場合

A君が当たる確率は①と②でどのように変わるか？

または、変わらないか？

結論とその根拠を述べよ。

グループ討議の結果

第1グループ

第6グループ

第2グループ

第7グループ

第3グループ

第8グループ

第4グループ

第9グループ

第5グループ

第10グループ

解説～確率の考え方～

<結論>

A君が旅行券を当たる確率は②のほうが①より高い.

<根拠>

4個の箱を [ア] [イ] [ウ] [エ]とする.

A君が箱[イ]を選んだとする.

旅行券が箱[イ]に入っている確率 = $1/4$... ①

旅行券が箱[ア], [ウ], [エ]のいずれかに入っている
確率 = $3/4$

◆箱[ア], [ウ], [エ]から選び直す場合(参考のため)

3個の箱のうちの1個の箱に旅行券が入っている確率＝
(3個のうちいずれかに入っている確率 $=3/4$) $\times$ (3個のうちの1個に入っている確率 $=1/3$) $=(3/4)\times(1/3)=1/4$
これは箱[イ]に入っている確率 $=1/4$ と同じである.
(条件を追加していないので当然である)

◆3個の箱のうち, 1個の箱が空であると分かった場合
仮に, 箱[ア]が空であるとする.
箱[ウ], [エ]から選び直す場合

2個の箱のうち1個の箱に旅行券が入っている確率＝
(2個のうちいずれかに入っている確率 $=3/4$) $\times$ (2個のうちの1個に入っている確率 $=1/2$) $=(3/4)\times(1/2)=3/8\cdots$ ②

以上より, ①の確率<②の確率となる.

<参考> 次の2通りの状況を考えてみる.

(1) A君が箱を選ぶ前に司会者が4個の箱の中から空箱を1個教える(選ぶ箱が4個から3個に減る).

(2) A君が箱を一つ選んでから, 司会者が残りの3個の箱から空箱を1個教える.

(1)の場合は, A君が選んだ箱に旅行券が入っている確率は $1/3$ であり, 残りの2箱から選び直した場合も確率は $1/3$ である.

(2)の場合はA君が選んだ箱に旅行券が入っている確率は $1/4$ である. 残りの3個の箱のなかに空箱があることが分かっても確率 $1/4$ は変わらない. 残り3個から選び直す場合は「選ぶという試行が行われるので, 新たに確率が計算される」, 「選ぶ対象は3個から2個に減っている」ので確率は変わる.