

情報数学

中山クラス
第8週

<今日の内容>

- ◇前回の演習問題解説
- ◇総合力学習
確率に関する問題をグループで検討、発表

総合力学習の進め方

<グループ分け>

1グループ当たり7名程度とする(6~7名)
現在、着席している席の近くでグループを構成する。
はみ出る場合は席を移動する。

<課題>

課題を2題を出題する。

<検討>

各グループ内で課題を検討し、意見を集約する。

<結果の発表&質疑>

各グループで代表者が検討結果とその理由を発表する。
発表内容に関して、他のグループから質問を受け付ける。

<教員からの解説>

確率の考え方、計算方法について

演習問題(前回)の解説

<問題>

次の漸化式の解を求めよ。

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2, n \geq 2$$

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

<解答例>

まず、同次解を求める。 $a_n = A\alpha^n$ と置き、漸化式
(右辺=0)に代入して、次の特性方程式を得る。

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$

これを解いて

$$\alpha = 3, 1$$

を得る。従って、同次解の一般式は

$$a_n = A_1 3^n + A_2 1^n = A_1 3^n + A_2$$

総合力演習課題(1)

宝くじを当てた人が県内の3大学(A大学, B大学, C大学)のどれか1つを無作為抽選で選び、その大学に全額寄付することを決めた。抽選に立ち会った証人はその結果を知っているが、各大学にはまだ通知されていない。

A大学の関係者が証人に対して「B大学かC大学のいずれかは落選するのだから、どちらが落選したか教えてほしい」と依頼し、証人は「B大学が落選した」と教えた。

そこで、A大学の関係者は次のように考えた。

「はじめは3大学から選ぶので、当選確率は1/3であったが、証人から情報を得た後は、2大学から選ぶことになるから当選確率は1/2になる」

(問題)

A大学の関係者の考え方は正しいか？間違っているか？
結論とその根拠を述べよ。

次に、特解を求める。

漸化式の右辺が定数であるから、特解を $a_n = Bn + C$ とし、漸化式に代入して、 B, C を求める。

$$\begin{aligned} & a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ &= (Bn + C) - 4[B(n-1) + C] + 3[B(n-2) + C] \\ &= -2B = 2 \end{aligned}$$

これより、 $B = -1, C = 0$ となる。

同次解+特解は次のようになる。

$$a_n = A_1 3^n + A_2 - n$$

最後に境界条件より

$$a_0 = A_1 + A_2 = 1$$

$$a_1 = 3A_1 + A_2 - 1 = 2$$

これより、 $A_1 = 1, A_2 = 0$ 。

一般解(最終)は次のように求まる。

$$a_n = 3^n - n$$

グループ討議の結果

第1グループ

第6グループ

第2グループ

第7グループ

第3グループ

第8グループ

第4グループ

第9グループ

第5グループ

第10グループ

解説～確率の考え方～

<結論>

A大学の考えは間違っており、当選の確率は変わらず1/3である。

<根拠>

3大学から無作為抽出した段階で各大学が当選する確率は1/3であると確定している。

「B大学が落選した」と知らされたが、この段階でA大学とC大学の2校のみで無作為抽選が行われたわけではないので、A大学の当選確率は変化しない。

グループ討議の結果

第1グループ	第6グループ
第2グループ	第7グループ
第3グループ	第8グループ
第4グループ	第9グループ
第5グループ	第10グループ

<参考>

「B大学が落選した」というのは結果であり、当選確率には影響しない。

「当選の可能性はA大学とC大学しかないの、確率は1/2である」という考えは、「B大学を除外してA大学とC大学だけで抽選を行うことを想定」している。しかし、「無作為抽選においては3大学は同等に当選の可能性を有しており」、B大学を除外することは想定していない。

解説～確率の考え方～

<結論>

A君が旅行券を当たる確率は②のほうが①より高い。

<根拠>

4個の箱を [ア] [イ] [ウ] [エ] とする。
A君が箱 [イ] を選んだとする。

旅行券が箱 [イ] に入っている確率 = $1/4$ …… ①
旅行券が箱 [ア], [ウ], [エ] のいずれかに入っている確率 = $3/4$

総合力演習課題(2)

あるTV番組において、くじ引きにより海外旅行をプレゼントしている。4つの箱があり、その一つに海外旅行券が入っており、残り3個の箱は空である。

A君が一つの箱を選んだとき、司会者が残りの3個の箱から1個を選び、それが空箱であることを教えてくれた。A君は1回だけ箱を選び直すことが出来るものとする。

(問題)

① A君が最初に選んだ箱を変更しない場合
② A君が箱を残りの2個から選び直した場合
A君が当たる確率は①と②でどのように変わるか？
または、変わらないか？
結論とその根拠を述べよ。

◆箱 [ア], [ウ], [エ] から選び直す場合 (参考のため)

3個の箱のうちの1個の箱に旅行券が入っている確率 = $(3個のうちいずれかに入っている確率 = $3/4$) \times (3個のうち1個に入っている確率 = $1/3$) = $(3/4) \times (1/3) = 1/4$$
これは箱 [イ] に入っている確率 = $1/4$ と同じである。
(条件を追加していないので当然である)

◆3個の箱のうち、1個の箱が空であると分かった場合に、箱 [ア] が空であるとする。 箱 [ウ], [エ] から選び直す場合

2個の箱のうち1個の箱に旅行券が入っている確率 = $(2個のうちいずれかに入っている確率 = $3/4$) \times (2個のうち1個に入っている確率 = $1/2$) = $(3/4) \times (1/2) = 3/8$ …… ②$

以上より、①の確率 < ②の確率となる。

<参考> 次の2通りの状況を考えてみる.

- (1) A君が箱を選ぶ前に司会者が4個の箱の中から空箱を1個教える(選ぶ箱が4個から3個に減る).
- (2) A君が箱を一つ選んでから、司会者が残りの3個の箱から空箱を1個教える.

(1)の場合は、A君が選んだ箱に旅行券が入っている確率は $1/3$ であり、残りの2箱から選び直した場合も確率は $1/3$ である.

(2)の場合はA君が選んだ箱に旅行券が入っている確率は $1/4$ である. 残りの3個の箱のなかに空箱があることが分かっても確率 $1/4$ は変わらない. 残り3個から選び直す場合は「選ぶという試行が行われるので、新たに確率が計算される」、「選ぶ対象は3個から2個に減っている」ので確率は変わる.