

情報数学

中山クラス

小テスト予想問題
解答例

質問がある場合は

nakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

までメールしてください.

PC, 携帯, スマホなど, 何からでもOKです.

問題1 (pp.23, 定理2.12)

次式において, x^7 の係数を求めよ.

$$(1+x)^{10}$$

<解答例>

二項定理より x^7 の係数は ${}_{10}C_7$ である.

$${}_{10}C_7 = \frac{10!}{(10-7)!7!} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

問題2 (p.25, 定理2.13)

次の値を求めよ. 但し, 答えは指数(べき乗)の形で良い.

$${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$$

<解答例>

定理2.13において, $n = 5$ の場合に相当する.

$${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32$$

問題3 (p.25)

5個の異なる物から0個, 2個, 4個取り出す組合せの総和と1個, 3個, 5個取り出す組合せの総和を求め, それらが等しいことを示せ.

<解答例>

$$\text{前者} = {}_5C_0 + {}_5C_2 + {}_5C_4 = 1 + 10 + 5 = 16$$

$$\text{後者} = {}_5C_1 + {}_5C_3 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 1 = 16$$

以上より, 前者=後者が成り立つ.

問題4 (p.26-定理2.15, p.27-例2.12)

赤いボール3個, 青いボール4個, 黄色いボール2個を全て並べる順列の数を求めよ.

<解答例>

定理2.15の条件と同じであるから,

$$\binom{9}{3,4,2} = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

問題5 (p.28, 例2.13)

赤いボール3個, 青いボール2個, 黄色いボール1個から5個選んで作る順列の数を求めよ.

<解答例>

全てのボールを使用しない場合であり, 5個の構成を分けて定理2.15を適用する.

<5個の構成>

①赤3個+青2個

②赤3個+青1個+黄色1個

③赤2個+青2個+黄色1個

$$\begin{aligned} \text{①} + \text{②} + \text{③} &= \binom{5}{3,2} + \binom{5}{3,1,1} + \binom{5}{2,2,1} \\ &= \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!1!1!} + \frac{5!}{2!2!1!} = 10 + 20 + 30 = 60 \end{aligned}$$

問題6 (p.28, 系2.1)

赤いボール4個, 青いボール3個, 黄色いボール2個を9個の異なる箱にそれぞれ1個ずつ入れる方法は何通りあるか.

<解答例>

系2.1の条件と同じである.

$$n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 2$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 9 \text{に相当する.}$$

$$\binom{9}{4,3,2} = \frac{9!}{4! 3! 2!} = 1260$$

問題7 (pp.30-31, 例2.15)

$(1 + x + x^3 + x^5)^4$ を展開して出来る多項式において, x^8 の係数を求めよ.

<解答例1>

x^8 の構成(方針: 低次の項を多く使用→高次の項を使用)

$$\textcircled{1} x \times x \times x \times x^5 \rightarrow {}_4C_3 \times {}_1C_1 = 4$$

$$\textcircled{2} x \times x \times x^3 \times x^3 \rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$$

$$\textcircled{3} x^3 \times x^5 \times 1 \times 1 \rightarrow {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 = 12$$

$$x^8 \text{の係数} = 4 + 6 + 12 = 22$$

<解答例2>

$v = x, w = x^3, y = x^5, z = 1$ とおく.

$$\textcircled{1} v^3 y^1 \text{の係数} = \binom{4}{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\textcircled{2} v^2 w^2 \text{の係数} = \binom{4}{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\textcircled{3} w^1 y^1 z^2 \text{の係数} = \binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!1!2!} = 12$$

$$x^8 \text{の係数} = 4 + 6 + 12 = 22$$

問題8 (pp.10-11, 例2.9)

次の図は道路マップを表している. 進む方向は右方向(→)と上方向(↑)のみである. 以下の問に答えよ.

- (1) A点からB点に行く経路は何通りあるか.
- (2) X印の道路を通らない場合は何通りになるか.
- (3) O印の道路を必ず通る場合は何通りになるか.

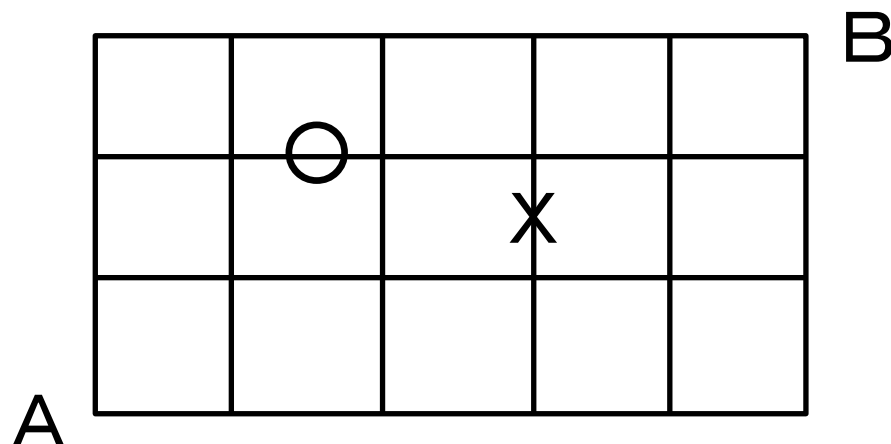
<解答例>

- (1) 右方向→が5個, 上方向↑が3個の合計8個ある.

(例) →↑→→↑→→↑

A点からB点に行く経路の総数は8個の位置(順番)から3(5)個を選んで↑(→)に割り当てる組合せの数に等しい.

$${}_8C_3 = {}_8C_5 = 56 \text{通り}$$



(2) X印の道を必ず通る経路の数を求め、これを総数より差し引く。
A点→X印の間には右向き→が3個、上向き↑が1個入る。X印→B点の間には右向き→が2個、上向き↑が1個入る。

①(A点→X印の道)の経路の数=4個の位置(順番)から1(3)個選んで↑(→)に割り当てる組合せの数 $= {}_4C_1 = {}_4C_3 = 4$

②(X印の道→B点)の経路の数=3個の位置(順番)から1(2)個を選んで↑(→)に割り当てる場合の数 $= {}_3C_1 = {}_3C_2 = 3$

③X印の道を必ず通る経路の数=①×② $= 4 \times 3 = 12$

X印の道を通らない経路の数=総数-③ $= 56 - 12 = 44$ 通り

(3) 上記の③を求める方法と同じである。

A点→O印の間には右向き→が1個、上向き↑が2個入る。O印→B点の間には右向き→が3個、上向き↑が1個入る。

①(A点→O印の道)の経路の数=3個の位置(順番)から2(1)個選んで↑(→)に割り当てる組合せの数 $= {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

②(O印の道→B点)の経路の数=4個の位置(順番)から1(3)個を選んで↑(→)に割り当てる場合の数 $= {}_4C_1 = {}_4C_3 = 4$

③O印の道を必ず通る経路の数=①×② $= 3 \times 4 = 12$ 通り

問題9 (p.6)

男子4人と女子2人を1列に並べるとき、次の問に答えよ.

- (1) 全部の並べ方は何通りあるか.
- (2) 女子2人が隣り合う並べ方は何通りあるか.
- (3) 女子2人が隣り合わない並べ方は何通りあるか.

<解答例>

- (1) 異なる6人から6人を選んで作る順列の数に等しい.

$${}_6P_6 = 6! = 720 \text{通り}$$

- (2) 女子2人をまとめて1組とする.

男子4人＋女子1組みの順列＝(異なる5人から5人を選んで作る順列の数)×(女子2人の順列の数)

$${}_5P_5 \times {}_2P_2 = 5! \times 2! = 240 \text{通り}$$

- (3) (1)の結果－(2)の結果として求まる.

$$720 - 240 = 480 \text{通り}$$

問題10(pp.20-21)

3種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る.

(1)何通りの作り方があるか.

(2)3種類から少なくとも1個は入れるとすると, 何通りになるか.

<解答例>

(1)3種類の異なる物から重複を許して8個取って作る組合せの数に等しい.

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

(2)条件を満たすために, 3種類の菓子から1個ずつ選んで菓子折に入れる. そうすると, 問題は次のようになる「3種類の異なる物から重複を許して5個取って作る組合せの数」

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

問題11 (pp.20-21)

3つの変数からなる次の1次方程式を考える.

$$x + y + z = 6$$

(1) 負でない整数解の組は何通りあるか.

(解の例) $x = 1, y = 3, z = 2, x = 0, y = 5, z = 1$

(2) 正の整数解は何通りあるか. (解として0は含まない)

<解答例>

(1) $x = 1, y = 3, z = 2$ は x を1個, y を3個, z を2個選んだと考える. $x = 0, y = 5, z = 1$ も同様に x を0個, y を5個, z を1個選んだと考える→負でない整数解の組の数=3種類の異なる物から重複を許して6個とる組合せの数

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

(2) 重複組合せは0個選ぶことも可能なので, まず, 3種類 x, y, z から1個ずつ選ぶ. そうすると, 求めるべきものは「3種類の異なる物から重複を許して3個とる組合せの数」となる.

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

問題12(p.32)

異なる物を異なる箱に入れる問題において、各箱に入れる物を高々1個に制限する場合、以下の問に答えよ.

- (1) 3個の異なる物を5個の異なる箱に入れる場合、何通りの方法があるか.
- (2) 5個の異なる物を3個の異なる箱に入れる場合、何通りの方法があるか.

<解答例>

p.32の「1. の問題で各箱に入れる物をたかだか1個に制限する場合」に該当する.

- (1) 箱の数 $n = 5 >$ 物の数 $r = 3$ であるから

$${}_nP_r = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{通り}$$

- (2) 箱の数 $n = 3 <$ 物の数 $r = 5$ であるから

$${}_rP_n = {}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{通り}$$

問題13 (p.33)

異なる5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において、各箱に入れる物の数を制限しない場合、以下の問に答えよ.

(1) 箱内の物の順序を考えない場合、何通りの方法があるか.

(2) 箱内の物の順序を考える場合、何通りの方法があるか.

<解答例>

(1) p.33の「1. の問題で各箱に入れる物の数を制限せず、箱内での物の順番を考えない場合」に該当する.

$${}_n\Pi_r = {}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

(2) p.33の「1. の問題で各箱に入れる物の数を制限せず、箱内での物の順番を考える場合」に該当する.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = \frac{(3+5-1)!}{(3-1)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

問題14 (pp.34-35)

同じ種類の5個の物を異なる3個の箱に入れる問題において、以下の問に答えよ.

- (1) 各箱に入れる物を高々1個に制限する場合、何通りあるか.
- (2) 各箱に入れる物の数を制限しない場合、何通りあるか.
- (3) 各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合、何通りあるか.

<解答例>

(1) p.34の「2. の問題で各箱に入れる物を高々1個に制限する場合」に該当する. この問題では、同種の物の数 $r = 5 >$ 箱の数 $n = 3$ であるため、3個の箱に1個ずつ入れる1通りの入れ方しかない.

(2) p.34の「2. の問題で各箱に入れる物の数を制限しない場合」に該当する.

$${}_n H_r = {}_3 H_5 = {}_{3+5-1} C_5 = {}_7 C_5 = \frac{7!}{2! 5!} = 21$$

(3) p.35の「2. の問題で各箱に入れる物の数を少なくとも1個とする場合」に該当する.

$${}_n H_{r-n} = {}_{r-1} C_{n-1} = {}_4 C_2 = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

問題15(pp.7-8)

6人が円形テーブルのまわりに並べられた6個の座席に座る場合の座り方の数を求めよ.

<解答例>

最初の1人が座るとき, 全ての座席は全く同等なので, 1通りの座り方しかない. 2人目以降は最初に座った人が身印となって, 残り全ての座席に順番を着けたのと同じになるので, 残りの人が座る方法は $n - 1$ 個の物を全て使って作る順列の数になる.

$${}_{n-1}P_{n-1} = (n - 1)! = 5! = 120 \text{通り}$$

問題16 (pp.16-17)

パスカルの三角形において以下の問に答えよ.

(1) $[x]$, $x=a, b, c, d, e, f$ に入る ${}_nC_r$ を求めよ.

(n, r を求める).

(2) $[x]$, $x=a, b, c, d, e, f$ に入る数字を求めよ.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & [a] & & 1 & \\ & & & & & & \\ 1 & & [b] & & [c] & & 1 \\ & & & & & & \\ & 1 & [d] & & [e] & & [f] & & 1 \end{array}$$

<解答例>

(1) n は上から $n = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$, r は左から $r = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$ となる. $[a]{}_2C_1, [b]{}_3C_1, [c]{}_3C_2, [d]{}_4C_1, [e]{}_4C_2, [f]{}_4C_3$

(2) ある場所の数値は, その左上と右上にある数値の和として求まる. $[a] = 1 + 1 = 2, [b] = 1 + 2 = 3, [c] = 2 + 1 = 3, [d] = 1 + 3 = 4, [e] = 3 + 3 = 6, [f] = 3 + 1 = 4$