情報数学

達成度確認試験
2013.1.31
木曜3限クラス

解答例と配点（62満点）

問題1（10点）
赤いボール3個，青いボール2個，黄色いボール1個から5個選んで作る順列の数を求めよ．

＜解答例＞
全てのボールを使用しない場合であり，5個の構成を分けて定理2.15を適用する．
＜5個の構成＞
①赤3個＋青2個
②赤3個＋青1個＋黄色1個
③赤2個＋青2個＋黄色1個

①＋②＋③= $\binom{5}{3,2}+\binom{5}{3,1,1}+\binom{5}{2,2,1}$

$$=\frac{5!}{3!\,2!}+\frac{5!}{3!\,1!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}=10+20+30=60$$

問題2（5点×2＝10点）
異なる物を異なる箱に入れる問題において，各箱に入れる物を高々1個に制限する場合，以下の問に答えよ．
（1）3個の異なる物を5個の異なる箱に入れる場合，
何通りの方法があるか．
（2）5個の異なる物を3個の異なる箱に入れる場合，
何通りの方法があるか．

＜解答例＞
p.32の「1．の問題で各箱に入れる物をたかだか1個に制限する場合」に該当する．
（1）箱の数$n=5>$物の数$r=3$であるから
$${}_nP_r={}_5P_3=5\times4\times3=60\text{通り}$$
（2）箱の数$n=3<$物の数$r=5$であるから
$${}_rP_n={}_5P_3=5\times4\times3=60\text{通り}$$

問題3（10点）

次の漸化式の一般解を求めよ．
$$a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}=2^n,\qquad n\geq 2$$
$$a_0=1,\qquad a_1=0$$

＜解答例＞
同次解
漸化式=0とおいて，$a_n=K\alpha^n$を代入してαを求める．
$$a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}=0$$
$$K\alpha^n-4K\alpha^{n-1}+3K\alpha^{n-2}=0$$
$$\alpha^2-4\alpha+3=0$$
$$\alpha=3,1$$
同次解の一般解
$$a_n=K_1 3^n+K_2 1^n$$

特解
漸化式の右辺が2^nであるから，特解を$a_n=A2^n$とおき，漸化式に代入する．
$$a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}$$
$$=A2^n-4A2^{n-1}+3A2^{n-2}$$
$$=A2^{n-2}(4-8+3)=-A2^{n-2}=2^n$$
$$A=-4$$

従って，特解は
$$a_n=-4\cdot2^n=-2^{n+2}$$

一般解（未定係数）
$$a_n=K_1 3^n+K_2 1^n-2^{n+2}$$

境界条件より
$$a_0=K_1+K_2-4=1$$
$$a_1=3K_1+K_2-8=0$$
$$K_1+K_2=5$$
$$3K_1+K_2=8$$
これより
$$K_1=\frac{3}{2},K_2=\frac{7}{2}$$

一般解（最終）
$$a_n=\frac{3}{2}3^n+\frac{7}{2}1^n-2^{n+2}$$
$$=\frac{1}{2}3^{n+1}+\frac{7}{2}-2^{n+2}$$

問題4（10点）

パン屋が3軒（A店，B店，C店）あります．3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ，以下のことが分かりました．

- フランスパンを買った人は16人．
- フランスパンを買った人のうち，C店で買った人は8人．
- C店におけるフランスパンの割合は20%．

100人のうち，C店でパンを買った人の割合（%）を求めよ．

＜解答例＞

仮定（原因）：壺の中の赤玉の個数＝2，4個

壺1［○○○●●］，壺2［○●●●●］

H_i：壺iから玉1個取り出す．$i=1,2,$

結果：取りだした玉が赤玉である．

D：壺から玉1個を取りだしたとき，それが赤玉である．

目標：赤玉が得られたとき，それが壺iから取り出された確率を全ての$i=1,2$について求める．

データDが得られたとき，その仮定がH_iである確率$P(H_i|D)$を$i=1,2,$について求める．

$$P(H_i|D)=\frac{P(D|H_i)P(H_i)}{P(D|H_1)P(H_1)+P(D|H_2)P(H_2)}$$

＜解答例＞

事象X：C店でパンを買う．

事象Y：フランスパンを買う．

与えられた条件

$$P(Y)=0.16, P(X|Y)=0.5, P(Y|X)=0.2$$

求めるもの：$P(X)$

ベイズの定理より

$$P(X)=\frac{P(X|Y)P(Y)}{P(Y|X)}=\frac{0.5\times 0.16}{0.2}=0.4$$

$P(D|H_i)$：壺iから赤玉を1個取り出す確率．

$$P(D|H_1)=2/5, P(D|H_2)=4/5$$

$P(H_i)$：壺iが選ばれる確率（問題では与えられていない）

→「理由不十分の原則」に基づき等確率とする．

$$P(H_1)=P(H_2)=1/2$$

上記の確率を用いて目的の確率分布が求まる．

$$P(H_1|D)=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

赤玉の個数	2個	4個
確率	$P(H_1\|D)=1/3$	$P(H_2\|D)=2/3$

確率の合計：$1/3+2/3=1$

問題5（10点）

1個の壺がある．壺の中には白と赤の5個の玉が入っている．そこから玉1個を取りだしたとき，それが赤玉であった（結果）．壺の中に入っている赤玉の個数（仮定／原因）の確率を求めよ．但し，壺の中にある赤玉の個数は偶数であることが分かっている．

問題6（3点×4＝12点）

3人の治験者を抽出し，新薬の効用を調べたところ，2人には効き，1人には効かないことが分かった．新薬の効き具合の分布を調べ，以下の問に答えよ．

1. 新薬の効き具合の分布を式で表せ．
2. 分布の概略図を示せ．
3. $0.5\le\theta\le 1$に対する確率を求めよ．
4. 平均値を求めよ．

＜解説＞

■ベイズ統計の母数

抽出した1人の治験者に新薬が効く確率θ

■尤度：$f(D|\theta)$

「効く確率」θのもとで，データD（3人のうち2人に効き，1人に効かない）の起こる確率（二項分布より求まる）

$$f(D|\theta) = {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1, 0 \le \theta \le 1$$

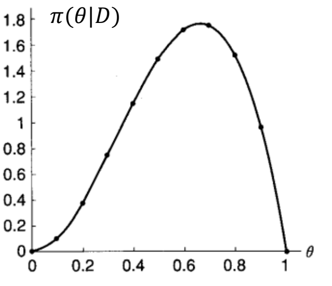
■事前分布：$\pi(\theta)$

治験するまでは効く確率θに関する情報はないので，理由不十分の原則より全ての可能性は均等であるとする．

$$\pi(\theta) = k$$

$0 \le \theta \le 1$であり，確率の総和（面積）＝1より，

事前分布　$\pi(\theta) = 1, 0 \le \theta \le 1$



■事後分布：$\pi(\theta|D)$

ベイズ統計の基本公式より

事後分布∝尤度×事前分布

$$\pi(\theta|D) \propto {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1 \times 1 \propto \theta^2(1-\theta)$$

$\pi(\theta|D)$の積分＝1より，

$$\int_0^1 k\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{k}{12} = 1 \rightarrow k = 12$$

$$\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$$

（答え）

1．分布の式　　$\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$

2．分布の概略図　次頁

3．$0.5 \le \theta \le 1$に対する確率

$$P(0.5 \le \theta \le 1) = \int_{0.5}^1 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{11}{16}$$

4．平均値

$$\mu = \int_0^1 \theta \times 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{3}{5}$$