ディジタル通信と信号処理

小テスト
問題と解答例
(火曜2限クラス)
＜54点満点＞

平成26年6月3日(火)

問題1(5点)

$y(n) = x(n) + x(n-1)$が線形性を満たすことを示せ.
(参考)$x_1(n) \to y_1(n), x_2(n) \to y_2(n)$であるとき,
$ax_1(n) + bx_2(n) \to ay_1(n) + by_2(n)$となることを示す.

$x_1(n), x_2(n)$に対する出力信号が$y_1(n), y_2(n)$であるとき,
$ax_1(n) + bx_2(n)$に対する出力信号が$ay_1(n) + by_2(n)$となることを示す.

$$y_1(n) = x_1(n) + x_1(n-1)$$
$$y_2(n) = x_2(n) + x_2(n-1)$$
$$\begin{aligned} y(n) &= [ax_1(n) + bx_2(n)] + [ax_1(n-1) + bx_2(n-1)] \\ &= a[x_1(n) + x_1(n-1)] + b[x_2(n) + x_2(n-1)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

問題2

システムのインパルス応答が次式で与えられるものとする.

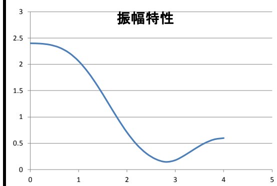
$$h(0) = 0.2, h(1) = 0.5\ \ h(2) = 1,$$
$$h(3) = 0.7, h(4) = 0.3, h(5) = -0.3$$

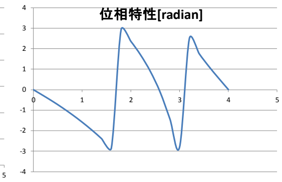
1. インパルス応答$h(n)$のフーリエ変換$H(e^{j\omega})$に関して,以下の問に答えよ.但し,標本化周波数$f_s = 8Hz$とする.(2点×3=6点)

a. $H(e^{j\omega})$の計算式を示せ.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{5} h(n)e^{-j\omega nT}$$

b. $H(e^{j\omega})$の振幅特性と位相特性の概略図を示せ.





c. 周波数$0, 1, 2, 3, 4Hz$における振幅特性と位相特性を数値(有効数字3桁)で示せ.

周波数[Hz]	0	1	2	3	4
振幅特性	2.4	2.06	0.708	0.181	0.6
位相特性[radian]	0	-1.58	2.36	-2.79	0.01

2. システムの入力信号が次式で与えられるものとする.(2点×4=8点)

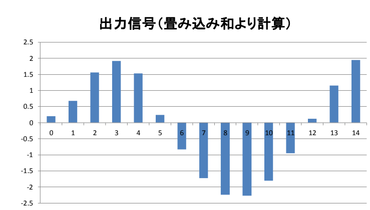
$$x(n) = \cos(2\pi fnT), f = 0.6Hz, T = 1/f_s$$

出力信号$y(n)$をインパルス応答$h(n)$と入力信号$x(n)$の畳み込み和により計算する方法に関して,以下の問に答えよ.

a. $y(n)$を畳み込み和で計算する式を示せ.更に,$y(7)$を$h(0) \sim h(5)$(数値)と$x(2) \sim x(7)$を用いて表せ.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{5} h(k)x(n-k)$$
$$\begin{aligned} y(7) = &\ 0.2x(7) + 0.5x(6) + x(5) + 0.7x(4) \\ &+0.3x(3) - 0.3x(2) \end{aligned}$$

b. $y(n)$の概略図を示せ.



c. $n = 0 \sim 4, 10 \sim 14$における$y(n)$を数値（有効数字３桁）で示せ．

n	0	1	2	3	4
$y(n)$	0.2	0.678	1.56	1.92	1.53
n	10	11	12	13	14
$y(n)$	-1.80	-0.945	0.119	1.16	1.94

d. 出力信号を畳み込み和で計算する場合，過渡応答が現れる．その理由を述べよ．

「$y(0) \sim y(4)$の計算において，インパルス応答$h(0) \sim h(5)$は全て使われない．このときに，$y(n)$は過渡応答となる．$y(5)$以降では$h(0) \sim h(5)$が全て使われるので，定常応答となる．」

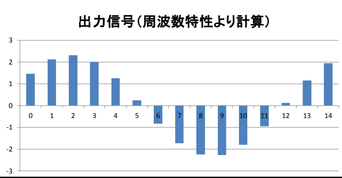
3. 出力信号$y(n)$を$H(e^{j\omega})$の振幅と位相を用いて計算する方法に関して，以下の問に答えよ．（２点×５＝１０点）

a. $y(n)$を計算する一般式を示せ．更に，振幅と位相を該当する数値（有効数字3桁）で表した式を示せ．

$$y(n) = |H(e^{j\omega})|\cos(2\pi f nT + \theta(\omega)), T = \frac{1}{f_s}$$

$$y(n) = 2.32 \times \cos(2\pi f nT - 0.888), T = 1/f_s$$

b. $y(n)$の概略図を示せ．$n = 0$から定常応答となる．



c. $n = 10 \sim 14$における$y(n)$を数値（有効数字3桁）で示せ．

n	10	11	12	13	14
$y(n)$	-1.80	-0.945	0.120	1.16	1.94

d. 設問2と設問3における$y(10) \sim y(14)$がほぼ等しいことを示せ．
2-cと3-cの$y(10) \sim y(14)$を比較するとほぼ等しいことが示される．

e. 設問2と設問3における出力信号$y(n)$が何サンプル目からほぼ等しくなるかを示せ．
Excelによる計算結果によると，$n = 5$サンプル目からほぼ等しくなっている．これは，2-dの過渡応答が生じる理由とも一致している．

4. 出力信号 $y(n)$ の位相特性に関して以下の問に答えよ．（２点×５＝１０点）

a. 入力（出力）信号（正弦波）の１周期におけるサンプル数を求めよ．

$$１周期のサンプル数 = \frac{f_s}{f} = \frac{8}{0.6} = 13.33サンプル$$

b. 1サンプル（標本間隔= T秒）当たりの角度を求めよ．（参考）正弦波の１周期は2π[radian]である．

$$１サンプル当たりの角度 = \frac{2\pi}{13.33} = 0.471\ [\mathrm{radian}]$$

c. 入力信号$x(n)$に対する出力信号$y(n)$の遅れをサンプル数で求めよ．ピークのずれをグラフから読み取る．
Excelの計算結果において，出力信号（周波数特性より計算）のピークの位置を1.8サンプルと読む．

d. bとcの結果から，$y(n)$の位相[radian]を求めよ．
$y(n)$の位相 $= 0.471 \times 1.8 = 0.848$ [radian]
出力信号は遅れているので，-0.848 [radian]となる．

e. dの結果と設問1で求めた位相特性がほぼ一致していることを示せ．
・フーリエ変換で計算した$f = 0.6$[Hz]における$H(e^{j\omega})$の位相$= -0.888$ [radian]
・$y(n)$の遅れ時間から計算した位相$= -0.848$ [radian]
これらは，ほぼ一致することが分かる．

5. 出力信号$y(n)$として次式を得たい．入力信号$x(n)$の周波数fを何Hzにすればよいか．（５点）

$$y(n) = 1.84\cos(2\pi f nT - 1.97)$$

フーリエ変換$H(e^{j\omega})$の振幅= 1.84，位相$= -1.97$である周波数を求めると$f = 1.2$ [Hz]である．

6. 位相特性の計算に関して以下の問に答えよ.（5点）

$$H(e^{j\omega}) = Re(\omega) + jIm(\omega)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}\right)$$

上式で計算されるθは$-\pi/2 \sim \pi/2$に分布する. これを$-\pi \sim \pi$に分布するようにするための計算式を求めよ.

上式のθをθ_tとする.

$$If\ Re[H(e^{j\omega})] > 0, \quad \theta(\omega) = \theta_t(\omega)$$

$$If\ Re[H(e^{j\omega})] < 0, Im[H(e^{j\omega})] > 0, \theta(\omega) = \theta_t(\omega) + \pi$$

$$If\ Re[H(e^{j\omega})] < 0, Im[H(e^{j\omega})] < 0, \theta(\omega) = \theta_t(\omega) - \pi$$

7. 入力信号$x(n)$の周波数が$7[Hz]$であるとき, 標本化周波数f_sの満たすべき条件を求めよ.（5点）

標本化定理より $2 \times 7[Hz] = 14[Hz] < f_s$