平成26年度後期　工学部・情報工学科

情報数学

試験問題と解答例（55点満点）
（火曜1限クラス）

2015.1.27（火）

（注意事項）
- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 解答は分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．
- 試験終了後に問題用紙を回収します．

問題1（5点×2題＝10点）

3つの変数からなる次の1次方程式を考える．

$$x + y + z = 8$$

（1）負でない整数解の組は何通りあるか．

（2）正の整数解は何通りあるか．

＜解答例＞

（1）負でない整数解の組の数＝3種類の異なる物から重複を許して8個とる組合せの数

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45 \text{通り}$$

（2）重複組合せは0個選ぶことも可能なので，まず，3種類x, y, zから1個ずつ選ぶ．そうすると，求めるべきものは「3種類の異なる物から重複を許して8－3＝5個とる組合せの数」となる．

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \text{通り}$$

問題2（10点）

パン屋が3軒あり，売っている種類は以下の通りである．
A店　あんパン，メロンパン
B店　クロワッサン，フランスパン，あんパン，ジャムパン
C店　メロンパン，あんパン，クリームパン

ある人があんパンを買ったとき，それをC店で買った確率を求めよ．ベイズの定理を用いて計算すること．

但し，3軒のパン屋が選ばれる確率は同じ（1/3）である．また，1軒のパン屋の中である種類のパンが買われる確率は同じである（例：3種類のパンを売っているパン屋では，1種類のパンが買われる確率は1/3）．

＜解答例＞

事象A　A店でパンを買う，事象B　B店でパンを買う
事象C　C店でパンを買う，事象W　あんパンを買う
あんパンを買ったとき，それをC店で買った確率はベイズの定理より次式で与えられる．

$$P(C|W) = \frac{P(W|C)P(C)}{P(W)}$$

$$= \frac{P(W|C)P(C)}{P(W|A)P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)}$$

条件より

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

$$P(W|A) = 1/2, P(W|B) = 1/4, P(W|C) = 1/3$$

これらの値を上式に代入する．

$$P(C|W) = \frac{4}{13}$$

問題3（10点）

次の漸化式の一般解を求めよ．

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 3^n, \qquad n \geq 2$$

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1$$

＊同次解，特解を計算する過程を示すこと．

授業で説明した方法では特解が求まらない問題となっているため，同次解まで出来ていれば正解とします．

ただし，$\alpha = 3, 1$は求まっているが，同次解の式が書かれていない場合は「－3」．

＜解答例＞

まず，同次解を求める．漸化式の右辺＝0とする．

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$$

特性方程式

$a_n = A\alpha^n$として，両辺を$A\alpha^{n-2}$で割る．

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$$
$$\alpha = 3, 1$$

同次解

$$a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot 1^n = A_1 \cdot 3^n + A_2$$

ここまでで，正解とする

次に，特解を求める．

漸化式の右辺が3^nであることと，同次解に3^nを含むことを考慮して（＊），特解を$a_n = Bn3^n$と仮定し，これが漸化式を満たすようにBを決める．

$$\begin{aligned} & a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ &= Bn3^n - 4B(n-1)3^{n-1} + 3B(n-2)3^{n-2} \\ &= Bn3^{n-2}(9 - 12 + 3) + B3^{n-2}(12 - 6) \\ &= 6B \cdot 3^{n-2} = 3^n \end{aligned}$$

これより，

$$B = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

特解 $$a_n = \frac{3}{2}n3^n = \frac{1}{2}n3^{n+1}$$

（＊）$a_n = B3^n$は特解になり得ない．

一般解（未定係数）＝同次解＋特解

$$a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 + \frac{1}{2}n3^{n+1}$$

境界条件より

$$a_0 = A_1 \cdot 3^0 + A_2 + \frac{1}{2}0 \cdot 3^1 = 0$$
$$a_1 = A_1 \cdot 3^1 + A_2 + \frac{1}{2}1 \cdot 3^2 = 1$$

式を整理する．

$$A_1 + A_2 = 0$$
$$3A_1 + A_2 + \frac{9}{2} = 1$$

これより

$$A_1 = -\frac{7}{4}, A_2 = \frac{7}{4}$$

一般解（最終）

$$a_n = -\frac{7}{4}3^n + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}n3^{n+1}$$

問題4（5点×2題＝10点）

3つのドア（A，B，C）があり，どれかに賞金が隠されている．回答者が一つのドア（A）を選んだ．出題者が残りのドアから，はずれのドア（C）を開けた．

回答者は

①ドアAのままにする．

②ドアBを選び直す．

という2通りを選択できる．①，②のどちらが賞金を獲得する確率が高いか？

＊ベイズの定理により，①及び②の方法で賞金を獲得する確率を求めて比較すること．

＜解答例＞

事象A　ドアAが当たり

事象B　ドアBが当たり

事象Z　ドアCを開く

求める確率

$P(A|Z), P(B|Z)$　いずれが高くなるかを調べる

ベイズの定理より

$$P(A|Z) = \frac{P(Z|A)P(A)}{P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B)}$$
$$P(B|Z) = \frac{P(Z|B)P(B)}{P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B)}$$

$P(A) = P(B) = 1/3$…はじめは情報がない
$P(Z|A) = 1/2$…Aが当たりであれば，はずれはBかCであるからCを開く確率は1/2
$P(Z|B) = 1$ … Bが当たりであれば，はずれはCであるから，Cを開く確率は1

$$P(A|Z) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|Z) = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$P(A|Z) = 1/3 < P(B|Z) = 2/3$より，ドアBを選び直すほうが当たる確率が高くなる.

■「1回目に表が出た」というデータを取り込む
D_1：1回目に表が出る.
コインを1回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_1) \propto f(D_1|\theta)\times\pi_0(\theta) = \theta\times 1 = \theta$$

規格化条件（面積＝1）より，

$$\pi_1(\theta) = \pi(\theta|D_1) = 2\theta$$

$\pi_1(\theta)$が2回目のコイン投げに対する事前分布となる.

■「2回目に裏が出た」というデータを取り込む
D_2：2回目に裏が出る.
コインを2回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_2) \propto f(D_2|\theta)\times\pi_1(\theta) = (1-\theta)\times 2\theta = 2\theta(1-\theta)$$

規格化条件（面積＝1）より

$$\pi_2(\theta) = \pi(\theta|D_2) = 6\theta(1-\theta)$$

問題5（5点×3題＝15点）
表の出る確率がθである1枚のコインがある. このコインを3回投げたとき，1回目に表，2回目に裏，3回目に表が出た. このとき，表の出る確率θの事後分布に関して以下の問に答えよ.

1. θの事後分布の式を求めよ.
   （事後分布∝尤度×事前分布）の関係を順次適用して最終的な事後分布を求めること.
2. θの事後分布の概略図を描け.
   $\theta = 0, 1$における事後分布の値，及び，事後分布の最大値とそのときのθの値を付記すること.
3. $0.5 \le \theta \le 1$に対する確率を求めよ.

＊計算過程を示すこと.

■「3回目に表が出た」というデータを取り込む
D_3：3回目に表が出る.
コインを3回投げた後のθの事後分布

$$\pi(\theta|D_3) \propto f(D_3|\theta)\times\pi_2(\theta) = \theta\times 6\theta(1-\theta)$$

規格化条件（面積＝1）より，

$$\pi_3(\theta) = \pi(\theta|D_3) = 12\theta^2(1-\theta)$$

＜解答例＞

■対象となる母数：表の出る確率＝ $\theta, 0 \le \theta \le 1$

■尤度$f(D|\theta)$
「表の出る確率＝ θ」の下でD（表／裏が出る）が起こる確率（条件付き確率）

$$f(表|\theta) = \theta$$
$$f(裏|\theta) = 1-\theta$$

■事前分布：$\pi(\theta) \rightarrow \pi_0(\theta)$‥コインを投げる前の事前分布
「表の出る確率」は$0 \le \theta \le 1$の範囲で考えられる. この範囲でθがどのように分布するかの情報はない.
「理由不十分の原則」に基づいて「一様分布」する.

$$\pi_0(\theta) = 1, 0 \le \theta \le 1$$

（まとめ）

1. 事後分布の式

$$\pi_3(\theta) = \pi(\theta|D_3) = 12\theta^2(1-\theta)$$

2. 事後分布の概略図（次頁）

3. $0.5 \le \theta \le 1$に対する確率

$$P(0.5 \le \theta \le 1) = \int_{0.5}^{1} 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{11}{16} = 0.688$$

事後分布$\pi_3(\theta)$の概略図