

平成26年度後期 工学部・情報工学科

情報数学

試験問題と解答例(56点満点)
(火曜2限クラス)

2015.1.27(火)

(注意事項)

- 教科書, 資料等の持ち込み不可. 電卓専用機使用可.
- 解答は分数または小数(有効数字3桁)で示すこと.
- 問題用紙は回収しません.

問題2(10点)

パン屋が3軒(A店, B店, C店)あります. 3軒のパン屋で買い物をした100人と各パン屋で聞いたところ, 以下のことが分かりました.

- A店でパンを買った人は30人.
- あんパンを買った人は20人.
- A店におけるあんパンの割合は30%である.

あんパンを買った人のうち, A店で買った人の割合(%)を求めよ.

* ベイズの定理を用いて計算すること.

問題1(5点×2題=10点)

3種類の菓子で合計8個入りの菓子折りを作る.

- (1) 全部で何通りの作り方があるか.
- (2) 3種類から少なくとも1個は入れるとすると, 何通りになるか.

* 計算過程を示すこと.

<解答例>

事象A A店でパンを買う

事象W あんパンを買う

あんパンを買った人のうち, A店で買った人の割合(%)
 $= P(A|W)$

ベイズの定理より,

$$P(A|W) = \frac{P(W|A)P(A)}{P(W)}$$

条件より

$$P(A) = 0.3, P(W) = 0.2, P(W|A) = 0.3$$

これらを上式に代入する.

$$P(A|W) = \frac{0.3 \times 0.3}{0.2} = \frac{0.9}{2} = 0.45 \rightarrow 45(\%)$$

<解答例>

(1) 3種類の異なる物から重複を許して8個取って作る組合せの数に等しい.

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = \frac{10!}{2!8!} = 45 \text{通り}$$

(2) 条件を満たすために, 3種類の菓子から1個ずつ選んで菓子折に入れる. そうすると, 問題は次のようになる「3種類の異なる物から重複を許して5個取って作る組合せの数」

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = \frac{7!}{2!5!} = 21 \text{通り}$$

問題3(10点)

次の漸化式の一般解を求めよ.

$$f_n - 3f_{n-1} = n - 2, \quad n \geq 4$$
$$f_3 = 1$$

* 同次解, 特解を計算する過程を示すこと.

<解答例>

まず、同次解を求める。漸化式の右辺=0とする。

$$f_n - 3f_{n-1} = 0,$$

特性方程式

$f_n = K\alpha^n$ を代入して、両辺を Kf^{n-1} で割る。

$$\begin{aligned} K\alpha^n - 3K\alpha^{n-1} &= 0 \\ \alpha - 3 &= 0 \rightarrow \alpha = 3 \end{aligned}$$

同次解

$$f_n = K \cdot 3^n$$

問題4(10点)

3人の死刑囚A, B, Cの中で1人だけ無作為に選ばれ、恩赦を受ける。誰が恩赦になるか看守は知っているが、囚人は知らない。

囚人Aが看守に「B, Cのうち誰かは必ず処刑されるから、その人の名前を教えてください」と頼んだ。看守はもともとだと思って「囚人Bが処刑される」と教えた。

囚人Aは「はじめは助かる確率は1/3であった」が、情報を得てから「助かるのは自分かCなので、確率は1/2に上がった」と喜んだ。囚人Aの計算は正しいか？

* ベイズの定理により、囚人Aが助かる確率を情報の入手前後で計算し、比較すること。

次に、特解を求める。

漸化式の右辺=(n の1次式)であることを考慮して、 $f_n = An^2 + Bn + C$ と仮定し、これが漸化式を満たすように A, B, C を決める。

$$\begin{aligned} f_n - 3f_{n-1} &= (An^2 + Bn + C) - 3\{A(n-1)^2 + B(n-1) + C\} \\ &= A(-2n^2 + 6n - 3) + B(-2n + 3) - 2C = n - 2 \end{aligned}$$

上式において、

n^2 の係数比較: $-2An^2 = 0$ より $A = 0$

n の係数比較: $(6A - 2B)n = n$ より $B = -1/2$

定数項の比較: $-3A + 3B - 2C = -2$ より $C = 1/4$

特解

$$f_n = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

事象を決める

事象A Aが助かる

事象B Bが助かる

事象C Cが助かる

事象SB 看守が「Bが処刑される」とAに教える

求める確率 $P(A|S_B)$

$$P(A|S_B) = \frac{P(S_B|A)P(A)}{P(S_B|A)P(A) + P(S_B|B)P(B) + P(S_B|C)P(C)}$$

一般解(未定係数)=同次解+特解

$$f_n = K \cdot 3^n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

境界条件

$$f_3 = K \cdot 3^3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

より

$$K = \frac{1}{12}$$

一般解(最終)

$$f_n = \frac{1}{12}3^n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

> 恩赦を受ける囚人は無作為に選ばれる(事前情報無し)

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3 (*)$$

> Bが助かる場合: 「Bが処刑される」とは言わない。

$$P(S_B|B) = 0$$

> Aが助かる場合: B, Cのうち誰かが処刑されるので、

$$P(S_B|A) = 1/2$$

> Cが助かる場合: B, Cのなかで処刑されるのは「B」

$$P(S_B|C) = 1$$

以上より、

$$P(A|S_B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (*)$$

となり、情報を得ても助かる確率は変わらない。従って、囚人Aの計算は間違っている。

問題5(4点×4題=16点)

3人の治験者を抽出し、新薬の効用を調べたところ、2人には効き、1人には効かないことが分かった。1人の治験者に新薬が効く確率を θ としたとき、以下の問に答えよ。

1. 新薬が効く確率 θ の分布を式で表せ。
2. θ の分布の概略図を示せ。
 $\theta = 0, 1$ における事後分布の値、及び、事後分布の最大値とそのときの θ の値を付記すること。
3. $0.5 \leq \theta \leq 1$ に対する確率を求めよ。
4. 平均値を求めよ。

* 計算過程を示すこと。

(まとめ)

1. 分布の式 $\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$
2. 分布の概略図 次頁
3. $0.5 \leq \theta \leq 1$ に対する確率

$$P(0.5 \leq \theta \leq 1) = \int_{0.5}^1 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{11}{16}$$

4. 平均値

$$\mu = \int_0^1 \theta \times 12\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{3}{5}$$

<解答例>

■ベイズ統計の母数

抽出した1人の治験者に新薬が効く確率 θ

■尤度: $f(D|\theta)$

「効く確率」 θ のもとで、データ D (3人のうち2人に効き、1人に効かない)の起こる確率(二項分布より求める)

$$f(D|\theta) = {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1, 0 \leq \theta \leq 1$$

■事前分布: $\pi(\theta)$

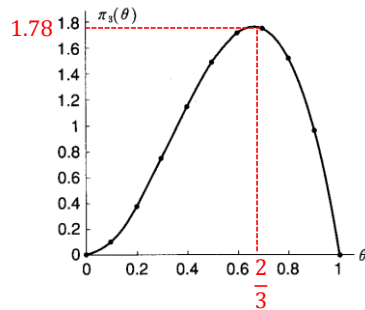
治験するまでは効く確率 θ に関する情報はないので、理由不十分の原則より全ての可能性は均等であるとする。

$$\pi(\theta) = k$$

$0 \leq \theta \leq 1$ であり、確率の総和(面積) = 1より、

事前分布 $\pi(\theta) = 1, 0 \leq \theta \leq 1$

事後分布 $\pi_3(\theta)$ の概略図



■事後分布: $\pi(\theta|D)$

ベイズ統計の基本公式より

事後分布 \propto 尤度 \times 事前分布

$$\pi(\theta|D) \propto {}_3C_2\theta^2(1-\theta)^1 \times 1 \propto \theta^2(1-\theta)$$

$\pi(\theta|D)$ の積分=1より、

$$\int_0^1 k\theta^2(1-\theta)d\theta = \frac{k}{12} = 1 \rightarrow k = 12$$

$$\pi(\theta|D) = 12\theta^2(1-\theta)$$