

平成28年度後期
工学部・情報工学科

情報理論
期末試験(木曜1限クラス)
(問題と解答例／60点満点)

2017.1.19

(注意事項)

- 教科書, 資料等の持ち込み不可. 電卓専用機使用可.
- 解答は分数または小数(有効数字3桁以内)で示すこと.
<試験終了後に問題用紙を回収します>

1

問題1(5点×2=10点)

4ビット分の雑音が混入しても

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

であるための符号語間の最小ハミング距離(奇数)を求めよ. (a), (b)に対して各々最小距離を求めること.

2

<解答例>

符号間の最小距離(n)が奇数であるから,
 $n = 2b + 1$

- 誤り検出可能
 $2b = 4 \rightarrow b = 2$, 最小距離 = $2b + 1 = 5$
- 誤り訂正可能
 $b = 4$, 最小距離 = $2b + 1 = 9$

3

問題2(5点×2=10点)

次に示す長さ15の符号語(情報ビット=10, 検査ビット=5)の三角形符号について以下の問に答えよ.

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & p_1 \\ 1 & 1 & 0 & p_2 \\ 1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

- 送信側で付加する検査ビット $p_1 \sim p_5$ を求めよ.
(1,0を用いた排他的論理和も示すこと)
- 受信側で y_i を計算したところ, 下記ようになった.
(a) $y_2 = 1, y_4 = 1, y_i = 0, i \neq 2, 4$
(b) $y_3 = 1, y_i = 0, i \neq 3$
1ビットの誤りが発生した箇所を x_{ij} または p_i で答えよ.
(注意)(a)と(b)に対する答えは別々に求める.

4

<解答例>

(1)

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ p_2 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\ p_3 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ p_4 &= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\ p_5 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & p_1 \\ 1 & 1 & 0 & p_2 \\ 1 & 0 & p_3 \\ 0 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-2点)

5

(2a) $y_2 = 1, y_4 = 1$

$$Y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & p_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & p_2 & \leftarrow y_2 \\ x_{31} & x_{32} & p_3 \\ x_{41} & p_4 \\ p_5 \\ \uparrow \\ y_4 \end{bmatrix}$$

y_2 と y_4 の双方に含まれる情報ビットは x_{22} である.

(2b) $y_3 = 1$

1個の y_i に含まれているビットは検査ビットであるから,
 y_3 に含まれている p_3 に誤りがある.

6

問題3 (5点 × 4 = 20点)

ハミング符号において、 $n = 6, k = 3$ とし、情報ビットを $x_1 \sim x_3$ 、検査ビットを $c_1 \sim c_3$ 、符号語を $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ とする。 $c_1 \sim c_3$ を $x_1 \sim x_3$ の排他的論理和により、次のように表す。

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, c_2 = x_1 \oplus x_3, c_3 = x_2 \oplus x_3$$

- (1) シンドローム $s_1 \sim s_3$ を $x_1 \sim x_3, c_1 \sim c_3$ の排他的論理和で表せ。
- (2) $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ において、誤りが生じているビットとそれに対する (s_1, s_2, s_3) を求めよ。
- (3) 情報ビット $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ に対する符号語 $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3)$ を求めよ。
- (4) $(1, 1, 1, 0, 1, 1)$ を受信した。誤り検出を行い、誤りがあれば訂正せよ (s_1, s_2, s_3 を計算し、(2)の結果と照合)。

<解答例>

(1)

$$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c_1$$

$$s_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_2$$

$$s_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_3$$

(2)

誤りビット シンドローム

	s_1	s_2	s_3
誤り無し	0	0	0
x_1	1	1	0
x_2	1	0	1
x_3	1	1	1
c_1	1	0	0
c_2	0	1	0
c_3	0	0	1

(3) 情報ビット $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

$$c_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$c_2 = x_1 \oplus x_3 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$c_3 = x_2 \oplus x_3 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$$

(4) $w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1, 0, 1, 1)$

$$s_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus c_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus c_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$s_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus c_3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$(s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 1)$ であるから、(2)の結果より x_3 に誤りがある。 x_3 を $1 \rightarrow 0$ に訂正する。
訂正 $\rightarrow w = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$

問題4 (5点 × 2 = 10点)

巡回符号に関して以下の間に答えよ。但し、 $n = 7, k = 4$ 、生成多項式 $G(x) = x^3 + x + 1$ とする。

以下に示す情報ビット $(a), (b)$ に対する符号語を求めよ。但し、次の手順で計算し、その計算過程も示すこと。割り算の計算過程も示すこと。

情報ビット $\rightarrow p(x) \rightarrow x^3 p(x) \rightarrow G(x)$ で割る \rightarrow 余り $R(x)$
 \rightarrow 符号多項式 $F(x) \rightarrow$ 符号語

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 0 1 0)$

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 0 0 1)$

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 0 1 0)$

$$p(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 = x^3 + x$$

$$x^3 p(x) = x^6 + x^4$$

$$R(x) = x + 1$$

$$F(x) = x^6 + x^4 + x + 1$$

$$w = (1 0 1 0 1 1)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 1 \\ x^2 + x + 1 \overline{) x^6 + x^4} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^3 \\ \underline{x^3 + x + 1} \\ x + 1 \end{array}$$

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0) = (1 0 0 1)$

$$p(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^3 + 1$$

$$x^3 p(x) = x^6 + x^3$$

$$R(x) = x^2 + x$$

$$F(x) = x^6 + x^3 + x^2 + x$$

$$w = (1 0 0 1 1 1 0)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x \\ x^2 + x + 1 \overline{) x^6 + x^3} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^4 \\ \underline{x^4 + x^2 + x} \\ x^2 + x \end{array}$$

問題5(5点×2=10点)

巡回符号に関して以下の問に答えよ。但し、 $n=7, k=4$, 生成多項式 $G(x) = x^3 + x + 1$ とする。

受信側で以下に示す符号語(a), (b)を受信した。誤り(1bit)を含むかどうか調べよ。また、誤りがある場合はどのビットが誤っているか調べ、訂正後の符号語を示せ。計算過程を示すこと。割り算の計算も示すこと。

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (1001101)$

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (1101001)$

(参考) 余り関数		誤りビット		
誤りビット	$e_2 e_1 e_0$	d_0	$e_2 e_1 e_0$	
d_3	1 0 1	c_2	1 0 0	
d_2	1 1 1	c_1	0 1 0	
d_1	1 1 0	c_0	0 0 1	

13

(a) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (1001101)$

$F'(x) = x^6 + x^3 + x^2 + 1$

$E(x) = x + 1$

$(e_2, e_1, e_0) = (011)$

d_0 に誤りあり

$(1001101) \rightarrow (1000101)$

$$\begin{array}{r} x^3 + x \\ x^3 + x + 1 \overline{) x^6 + x^3 + x^2 + 1} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^4 + x^2 + 1 \\ \underline{x^4 + x^2 + x} \\ x + 1 \end{array}$$

14

(b) $(d_3 d_2 d_1 d_0 c_2 c_1 c_0) = (1101001)$

$F'(x) = x^6 + x^5 + x^3 + 1$

$E(x) = 0$ であるから

誤りなし

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^3 + x + 1 \overline{) x^6 + x^5 + x^3 + 1} \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^5 + x^4 + 1 \\ \underline{x^5 + x^3 + x^2} \\ x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ \underline{x^4 + x^2 + x} \\ x^3 + x + 1 \\ \underline{x^3 + x + 1} \\ 0 \end{array}$$

15