

平成27年度後期
工学部・情報工学科

情報理論

第1回小テスト(木曜1限クラス)

問題と解答例(40点満点)

2015. 10. 22

<注意事項>

- 教科書、資料等の持ち込み不可。電卓専用機使用可。
- 対数の数値は問題4の(参考)を参照のこと。
- 解答は有効数字3桁(4桁目を四捨五入)で示すこと。
- 問題用紙を試験終了後に回収します。

1

問題1(3点×3題=9点)

胃痛(B)の原因として、ストレス(A_1)、胃潰瘍(A_2)、胃ガン(A_3)が考えられる。次のデータが分かっているとき、胃痛の原因をベイズ定理により確率的に求めよ。

<事前確率:原因が生じる確率>

$$P(A_1) = 70\%, \quad P(A_2) = 20\%, \quad P(A_3) = 10\%$$

<原因から結果が生じる確率>

$$P(B|A_1) = 30\%, P(B|A_2) = 40\%, P(B|A_3) = 30\%$$

<求める確率:結果から推定される原因の確率>

$$P(A_1|B), \quad P(A_2|B), \quad P(A_3|B)$$

2

<解答例>

<事象>

B 胃痛

A_1 ストレス

A_2 胃潰瘍

A_3 胃ガン

<事前確率>

$$P(A_1) = 0.7$$

$$P(A_2) = 0.2$$

$$P(A_3) = 0.1$$

<原因→結果の確率>

$$P(B|A_1) = 0.3$$

$$P(B|A_2) = 0.4$$

$$P(B|A_3) = 0.3$$

ベイズの定理による推定結果

(分母) = 0.32

$$P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

(分子)

$$P(A_1|B) \rightarrow P(A_1)P(B|A_1) = 0.21$$

$$P(A_2|B) \rightarrow P(A_2)P(B|A_2) = 0.08$$

$$P(A_3|B) \rightarrow P(A_3)P(B|A_3) = 0.03$$

<結果→原因の確率>

$$P(A_1|B) = 0.656 = 65.5\%$$

$$P(A_2|B) = 0.25 = 25\%$$

$$P(A_3|B) = 0.0938 = 9.38\%$$

3

問題2(10点)

ある壺の中に赤玉が5個、青玉が2個、白玉が1個入っている。この壺から1個の玉を取り出すときのエントロピー(平均情報量)を求めよ。

<解答例>

赤玉を取り出す確率 $p_1 = 5/8$

青玉を取り出す確率 $p_2 = 2/8 = 1/4$

白玉を取り出す確率 $p_3 = 1/8$

エントロピー

$$H = \sum_{i=1}^3 -p_i \log_2 p_i = 1.30 \text{ [bit]}$$

4

問題3(10点)

A君が卒業できる確率は60%、B君が卒業できる確率は80%である。結合エントロピーを求めよ。

<解答例>

事象 a_1 : A君が卒業できる $p_{a1} = 6/10 = 3/5$

事象 a_2 : A君が卒業できない $p_{a2} = 4/10 = 2/5$

事象 b_1 : B君が卒業できる $p_{b1} = 8/10 = 4/5$

事象 b_2 : B君が卒業できない $p_{b2} = 2/10 = 1/5$

5

結合事象の確率

$$(a_1, b_1) \rightarrow p_{11} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$$

$$(a_1, b_2) \rightarrow p_{12} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

$$(a_2, b_1) \rightarrow p_{21} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

$$(a_2, b_2) \rightarrow p_{22} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

これらの確率を結合エントロピーの式に代入する。

$$\begin{aligned} H(A) &= - \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} \log_2 p_{ij} \\ &= - \frac{12}{25} \log_2 \frac{12}{25} - \frac{3}{25} \log_2 \frac{3}{25} - \frac{8}{25} \log_2 \frac{8}{25} - \frac{2}{25} \log_2 \frac{2}{25} \\ &= 1.69 \text{ [bit]} \end{aligned}$$

6

問題4 (4+4+3=11点)

2人の学生の20科目の成績を以下に示す。2人の成績のエントロピー $H(A), H(B)$ を求めよ。さらに、2人のエントロピーの値の違いについて考察せよ(エントロピーの意味と成績分布に基づいて違いを説明する)

成績	S	A	B	C
A君	5	12	2	1
B君	5	6	4	5

(参考)

$$\log_2 3 = 1.58, \quad \log_2 5 = 2.32, \quad \log_2 7 = 2.81$$

7

<解答例>

$$\text{A君: } p_S = 5/20, p_A = 12/20, p_B = 2/20, p_C = 1/20$$

$$H(A) = \sum_{i=(S,A,B,C)} -p_i \log_2 p_i = 1.49 \text{ [bit]}$$

$$\text{B君: } p_S = 5/20, p_A = 6/20, p_B = 4/20, p_C = 5/20$$

$$H(B) = \sum_{i=(S,A,B,C)} -p_i \log_2 p_i = 1.99 \text{ [bit]}$$

 $H(A) < H(B)$ の理由

エントロピーは曖昧さを表す尺度である。

A君の成績はAに集中しており、予測し易い(曖昧さが小さい)。B君の成績はS~Cに万遍なく分布しており、予測が難しい(曖昧さが大きい)。

8