平成26年度後期
工学部・情報工学科

情報理論

第2回小テスト(火曜4限クラス)
問題と解答例
(44点満点)

2014. 11. 25

問題1(4点×3題=12点)

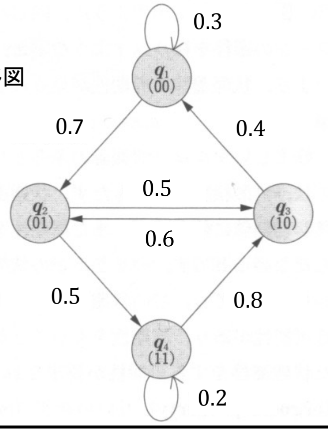
記号0,1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている．以下の問に答えよ．

$$p(0|00) = 0.3, \quad p(1|00) = 0.7$$
$$p(0|01) = 0.5, \quad p(1|01) = 0.5$$
$$p(0|10) = 0.4, \quad p(1|10) = 0.6$$
$$p(0|11) = 0.8, \quad p(1|11) = 0.2$$

(1)状態遷移図を図示せよ(状態遷移確率も付記)．
(2)各状態の定常確率$P(00), P(01), P(10), P(11)$を求めよ(分数として求めよ)．
(3)情報源のエントロピーを求めよ(有効数字3桁の小数で表せ)．

＜解答例＞

(1)状態遷移図



(2)定常確率$P(00), P(01), P(10), P(11)$

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \cdots (1)$$
$$P(00) = 0.3P(00) + 0.4P(10) \cdots (2)$$
$$P(01) = 0.7P(00) + 0.6P(10) \cdots (3)$$
$$P(10) = 0.5P(01) + 0.8P(11) \cdots (4)$$
$$P(11) = 0.5P(01) + 0.2P(11) \cdots (5)$$

式(1)と式(2)～(5)の内の3つの方程式を連立させて解く．結果は次のようになる．

$$P(00) = \frac{32}{179}, P(01) = \frac{56}{179}, P(10) = \frac{56}{179}, P(11) = \frac{35}{179}$$

(3)情報源のエントロピー

$$H(S) = H(0.3)P(00) + H(0.5)P(01) + H(0.4)P(10) + H(0.2)\,P(11)$$

(2)の結果と与えられたエントロピー数値(最後の頁)より，次のように求まる．

$$H(s) = 0.881 \times \frac{32}{179} + 1 \times \frac{56}{179} + 0.971 \times \frac{56}{179} + 0.722 \times \frac{35}{179} = 0.915\ [bit]$$

問題2(10点)

2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon = 1/10$であるときの記号単位の通信路容量C [bit/記号]を求めよ．

＜解答例＞

2元対称通信路における記号単位の通信路容量は

$$C = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon), p = 1/2 \quad [bit/記号]$$

であるから，$\varepsilon = 0.1$より

$$C = 1 - H(0.1) = 1 - 0.469 = 0.531\ [bit/記号]$$

問題3（5点×2題＝10点）

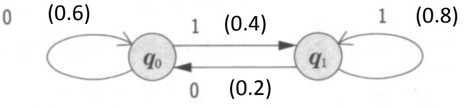
状態遷移におけるエルゴート性について説明し，エルゴート性を満たす状態遷移図の例を示せ．状態遷移確率の例も付記すること．

7

＜解答例＞

エルゴート性
- どの状態から出発しても，全ての状態に遷移できる．
- 周期性をもたない．
- 情報源の統計的性質をよく反映した状態遷移を行う．

状態遷移図の例
遷移確率[()内の数値]を1，0にしないこと．



8

問題4（4点×3題＝12点）

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる．

$$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon) \quad [bit/記号]$$

以下の問に答えよ．
（1）$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ．
（2）$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ．さらに，最大値とεの関係を定性的に説明せよ．
（3）$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ．さらに，最小値とεの関係を定性的に説明せよ．

9

＜解答例＞

（1）$p = 1/2$のとき$p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) = 1/2$となるから
$I(A;B) = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon)$

（2）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$0 \le H(\varepsilon) \le 1$であるから，$H(\varepsilon) = 0$のときに$I(A;B)$は最大値＝1となる．
$H(\varepsilon) = 0$ となるのは$\varepsilon = 0, 1$のときである．

＜$I(A;B)$の最大値とεの関係＞
$\varepsilon = 0 (\varepsilon = 1)$のときは，誤りなし（完全に誤る）なので，例えば，0を受信した場合は0（1）が送信されたと判断できる．従って，送信記号が100%（$I(A;B) = 1$）送られたことになる．

10

（3）$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$H(\varepsilon) = 1$のときに$I(A;B)$は最小値＝0となる．$H(\varepsilon) = 1$となるのは$\varepsilon = 0.5$のときである．

＜$I(A;B)$の最小値とεの関係＞
$\varepsilon = 0.5$のときは，例えば，0を送信すると同じ確率で0と1が受信される．言い換えると0を受信しても，0が送信されたか，1が送信されたか全く不明である．すなわち，送信記号は全く送られていない（$I(A;B) = 0$）ことになる．

11

（参考）エントロピー関数の値

$$
\begin{aligned}
H(0) &= 0 \\
H(0.1) &= 0.469 \\
H(0.2) &= 0.722 \\
H(0.3) &= 0.881 \\
H(0.4) &= 0.971 \\
H(0.5) &= 1
\end{aligned}
$$

近い値を用いる例
$p = 0.39$に対しては，$H(p) = H(0.4) = 0.971$を用いる．

エントロピー関数は$p = 0.5$に関して対称である．
$$H(p) = H(1-p)$$

12