平成28年度後期　工学部・情報工学科

情報理論

第2回小テスト（木曜1限クラス）

問題と解答例（50点満点）

2016．11．24

（注意事項）

- 教科書，資料等の持ち込み不可．電卓専用機使用可．
- 計算過程を示すこと．
- エントロピーは電卓で計算するか，参考ページの数値（近い値）を用いること．
- 解答は分数または小数（有効数字3桁）で示すこと．

＜試験終了後に問題用紙を回収します＞

問題1（5点×2題＝10点）

次の時系列について以下の問に答えよ．

101011010010110

（1）状態10の定常確率$P(10)$を求めよ．
（2）状態遷移確率$p(0|01)$を求めよ．

（ヒント）
（1）上の時系列において2ビットからなる状態の総数は14通りである．時系列中の10の状態の数をnとすると，$P(10) = n/14$である．
（2）$p(0|01)$における状態遷移は01の状態から次に0が発生する場合であるから，010が該当する．上の時系列において状態遷移の総数は13通りである．時系列中の010の数をmとすると，$p(0|01) = m/13$である．

＜解答例＞

101011010010110

（1）上記の時系列で状態10は6通りあるので，

$$P(10) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = 0.429$$

（2）上記の時系列で010の状態は3通りあるので，

$$p(0|01) = \frac{3}{13} = 0.231$$

問題2（5点×3題＝15点）

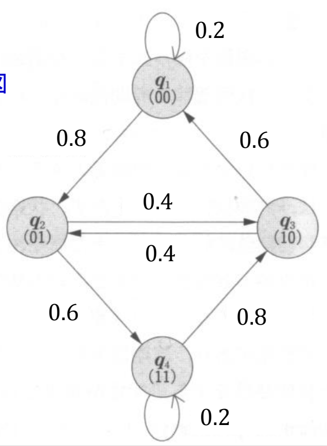
記号0，1の系列を発生する2重マルコフ情報源の状態遷移確率が次のように与えられている．以下の問に答えよ．

$$p(0|00) = 0.2,\qquad p(1|00) = 0.8$$
$$p(0|01) = 0.4,\qquad p(1|01) = 0.6$$
$$p(0|10) = 0.6,\qquad p(1|10) = 0.4$$
$$p(0|11) = 0.8,\qquad p(1|11) = 0.2$$

（1）状態遷移図を図示せよ（状態遷移確率も付記）．
（2）各状態の定常確率$P(00), P(01), P(10), P(11)$を求めよ（分数として求めよ）．
（3）情報源のエントロピーを求めよ（有効数字3桁の小数で表せ）．

＜解答例＞

（1）状態遷移図



（2）定常確率を求める方程式

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \cdots (1)$$
$$P(00) = 0.2P(00) + 0.6P(10) \cdots (2)$$
$$P(01) = 0.8P(00) + 0.4P(10) \cdots (3)$$
$$P(10) = 0.4P(01) + 0.8P(11) \cdots (4)$$
$$P(11) = 0.6P(01) + 0.2P(11) \cdots (5)$$

式（1）と式（2）～（5）の内の3つの方程式を連立させて解く．結果は次のようになる．

$$P(00) = \frac{3}{14}, P(01) = \frac{2}{7}, P(10) = \frac{2}{7}, P(11) = \frac{3}{14}$$

(3)情報源のエントロピー

$$H(S) = H(0.2)P(00) + H(0.4)P(01) + H(0.4)P(10) + H(0.2)\,P(11)$$
$$= 0.722 \times \frac{3}{14} + 0.971 \times \frac{2}{7} + 0.971 \times \frac{2}{7} + 0.722 \times \frac{3}{14}$$
$$= 0.864\ [bit]$$

問題3(10点)

$a_1 = 0, a_2 = 1$の生起確率が$p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$である2元対称通信路において，誤り率が$\varepsilon = 0.1$であるときの伝送情報量を求めよ.

<解答例>

伝送情報量

$$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon) \quad [bit/記号]$$

$$p = 0.3, \qquad \varepsilon = 0.1$$
$$v = p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)$$
$$= 0.3 \times 0.1 + 0.7 \times 0.9 = 0.66 \cong 0.65 \rightarrow 0.35$$

$$I(A;B) = H(v) - H(\varepsilon)$$
$$= H(0.35) - H(0.1)$$
$$= 0.934 - 0.469 = 0.465 \quad [bit/記号]$$

問題4(5点×3題＝15点)

2元対称通信路の伝送情報量は次式で与えられる.

$$I(A;B) = H\big(p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon)\big) - H(\varepsilon) \quad [bit/記号]$$

以下の問に答えよ.
(1)$p = 1/2$のときの$I(A;B)$を求めよ.
(2)$I(A;B)$の最大値とそのときのεを求めよ. さらに，最大値とεの関係を定性的に説明せよ.
(3)$I(A;B)$の最小値とそのときのεを求めよ. さらに，最小値とεの関係を定性的に説明せよ.

<解答例>

(1)
$p = 1/2$のとき$p\varepsilon + (1-p)(1-\varepsilon) = 1/2$となるから
$$I(A;B) = H(1/2) - H(\varepsilon) = 1 - H(\varepsilon)$$

(2)
$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$0 \le H(\varepsilon) \le 1$であるから，$H(\varepsilon) = 0$のときに$I(A;B)$は最大値＝1となる. $\varepsilon = 0, 1$のとき，$H(0) = H(1) = 0$であるから$I(A;B) = 1$(最大値)となる.

<$I(A;B)$の最大値とεの関係>
$\varepsilon = 0(\varepsilon = 1)$のときは，誤りなし(完全に誤る)なので，例えば，0を受信した場合は0(1)が送信されたと判断できる. 従って，送信記号が100%($I(A;B) = 1$)送られたことになる.

(3)
$I(A;B) = 1 - H(\varepsilon)$において，$H(\varepsilon)$ =1のときに$I(A;B)$は最小値＝0となる. $\varepsilon = 0.5$のとき，$H(0.5) = 1$であるから$I(A;B) = 0$(最小値)となる.

<$I(A;B)$の最小値とεの関係>
$\varepsilon = 0.5$のときは，例えば，0を送信すると同じ確率で0と1が受信される. 言い換えると0を受信しても，0が送信されたか，1が送信されたか全く不明である. すなわち，送信記号は全く送られていない($I(A;B) = 0$)ことになる.

（参考）エントロピー関数の値

$H(0) = 0$
$H(0.05) = 0.286$
$H(0.1) = 0.469$
$H(0.15) = 0.610$
$H(0.2) = 0.722$
$H(0.25) = 0.811$
$H(0.3) = 0.881$
$H(0.35) = 0.934$
$H(0.4) = 0.971$
$H(0.45) = 0.993$
$H(0.5) = 1$

近い値を用いる例
$p = 0.39$に対しては,
$H(p) = H(0.4) = 0.971$
を用いる.

エントロピー関数は$p = 0.5$に関して対称である.

$$H(p) = H(1 - p)$$