

情報理論  
第3回小テスト(木曜1限クラス)  
(問題と解答例/60点満点)

2016.12.22

(注意事項)

- 教科書, 資料等の持ち込み不可. 電卓専用機使用可.
- 対数については電卓で計算するか, 問題に付記された数値を使用すること.
- 解答は分数または小数(有効数字3桁)で示すこと.  
<試験終了後に問題用紙を回収します>

1

問題1 (8点×2題=16点)

次の情報源について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(1)シャノン-ファノ符号と効率 $e$ を求めよ.

(2)ハフマン符号と効率 $e$ を求めよ.

(参考)

$$\log_2 0.1 = -3.32, \quad \log_2 0.2 = -2.32$$

$$\log_2 0.3 = -1.74, \quad \log_2 0.4 = -1.32$$

2

<解答例>

(1)シャノン・ファノの符号化

確率の順に並べる

$$\begin{array}{cccc} A_2 & A_3 & A_4 & A_1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array}$$

確率が等しくなるように分割

$$\begin{array}{cccc} (A_2) & (A_3 & A_4 & A_1) \\ 0.4 & 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6 \end{array}$$

第2項を確率が等しくなるように分割

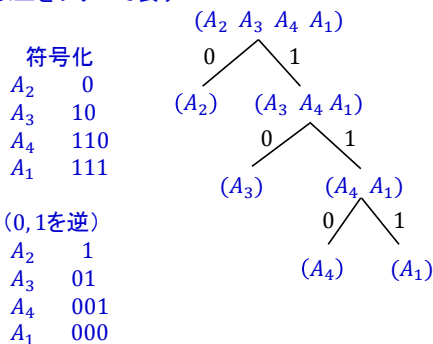
$$\begin{array}{ccc} (A_3) & (A_4 & A_1) \\ 0.3 & 0.2 + 0.1 = 0.3 \end{array}$$

第3項を分割する.

$$\begin{array}{cc} (A_4) & (A_1) \\ 0.2 & 0.1 \end{array}$$

3

以上をツリーで表す.



4

効率

$$H = - \sum_{i=1}^4 p_i \log_2 p_i = 1.85$$

$$L = \sum_{i=1}^4 g_i p_i = 1.90, \quad g_i : \text{各記号の符号長}$$

$$e = \frac{H}{L} = \frac{1.85}{1.90} \cong 0.972$$

効率 $e$ のミスは(1)のみで減点(-4点).

$H$ または $L$ が正しければ-2点.

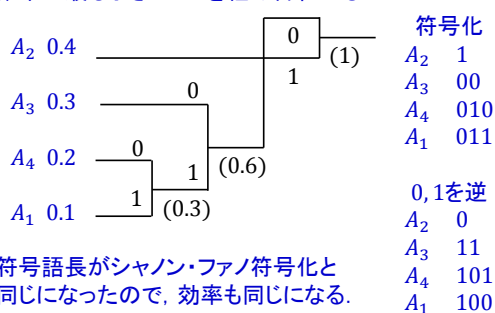
ハフマン符号が書かれていない場合は-8点.

5

(2)ハフマン符号(1)

記号を確率の大きい順に並べる.

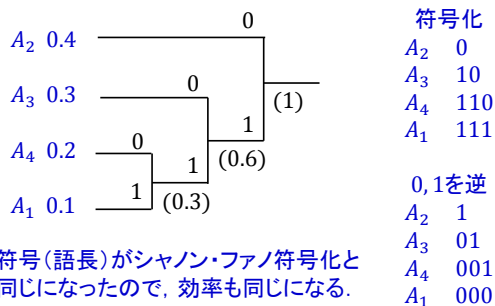
確率が最も小さい2つを組み合わせる.



6

(2)ハフマン符号(2)

記号を確率の大きい順に並べる。  
確率が最も小さい2つを組み合わせる。



符号(語長)がシャノン・ファノ符号化と同じになったので、効率も同じになる。

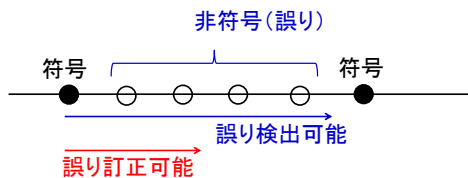
問題2(5点×2題=10点)

符号語間の最小のハミング距離が5である場合

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

なハミング距離(ビット数)を求めよ。

<解答例>



符号間最小距離=5ビット( $n = 2b + 1, b = 2$ )

(a)誤り検出可能な距離=4ビット( $2b$ )

(b)誤り訂正可能な距離=2ビット( $b$ )

問題3(5点×2題=10点)

3ビット分の雑音が入っても

- (a)誤り検出可能
- (b)誤り訂正可能

であるための符号語間の最小ハミング距離(偶数)を求めよ。

<解答例>

符号間の最小距離( $n$ )が偶数であるから、  
 $n = 2b$

(a)誤り検出可能

$$2b - 1 = 3 \rightarrow b = \frac{4}{2} = 2, \quad \text{最小距離} = 2b = 4$$

(b)誤り訂正可能

$$b - 1 = 3 \rightarrow b = 4, \quad \text{最小距離} = 2b = 8$$

問題4(9点+5点=14点)

長方形符号が次式で与えられている。以下の間に答えよ。

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & p_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & p_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & p_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}$$

(1) $p_1 \sim p_4, q_1 \sim q_5$ を求めよ。

(1,0を用いた排他的論理和を示せ)

(2)受信した符号 $Y'$ において、第2行が $[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ p_2]$ となった。 $Y'$ における $y_1 \sim y_4, z_1 \sim z_5$ を求めよ。  
ただし、 $p_2$ に誤りはないものとする。

<解答例>

(1)  $p_i$ は第*i*行の情報ビット,  $q_j$ は第*j*列の情報ビット,  $q_5$ は  $p_1 \sim p_4$ の排他的論理和であるから, 次のように求まる.

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ p_2 &= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ p_3 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ p_4 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ q_2 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ q_3 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ q_4 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ q_5 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{aligned}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-4点).

13

(2) 第2行を[1 0 1 1  $p_2$ ]で置き換える.

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式において,  $y_1 \sim y_4, z_1 \sim z_5$ を計算する.

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, y_2 = 1, y_3 = 0, y_4 = 0 \\ z_1 &= 0, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = 0, z_5 = 0 \end{aligned}$$

ここでは, 排他的論理和を書く必要はない.

14

問題5(5点+5点=10点)

次に示す長さ15の符号語(情報ビット=10, 検査ビット=5)の三角形符号について以下の間に答えよ.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p_1 \\ 1 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & p_3 \\ 1 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

(1) 送信側で付加する検査ビット  $p_1 \sim p_5$ を求めよ.  
(1,0を用いた排他的論理和を示せ)

(2) 受信側で  $y_i$ を計算したところ,  $y_1 = 1, y_3 = 1$ であった.  
1ビットの誤りが情報ビットで発生しているとする, どのビットで誤りが発生したか,  $x_{ij}$ で答えよ.

15

<解答例>

(1)

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \\ p_2 &= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\ p_3 &= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ p_4 &= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ p_5 &= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p_1 \\ 1 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 1 & p_3 \\ 1 & p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

排他的論理和が書かれていない場合は減点(-2点)

16

(2)  $y_1 = 1, y_3 = 1$

$$Y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & p_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & p_2 \\ x_{31} & x_{32} & p_3 \\ x_{41} & p_4 & \uparrow \\ p_5 & & y_3 \end{bmatrix} \leftarrow y_1$$

$y_1$ と $y_3$ の双方に含まれる情報ビットは $x_{13}$ である.

17