

平成24年度「確率と統計」
達成度確認試験問題（金曜クラス）

2012.7.27(金)

* 数値計算においては、計算を有効数字3桁程度で行い、結果を有効数字2桁～3桁で示せ。

配点：正解（○）：1点／設問，解答が正解に近い場合（△）：0.5点／設問

合計点：34点（答案用紙に記載）→ 成績評価の際に40点満点に換算

問題Ⅰ

次の文章の空欄に下欄から適当な語句を選択せよ。答案用紙に番号を記入せよ。

「推測統計では、非常に大規模なデータ全体の統計的性質について、その一部を取り出したデータから推測することが行われる。データを（ア）、一部を取り出したデータを（イ）、取り出すことを（ウ）という。（ア）の統計量を（エ）という。標本データから計算される統計量を（オ）という。（ア）の平均は（カ）、（イ）の平均は（キ）という。ある母数を推定するために用いられる標本統計量を（ク）、その値を（ケ）という。母数の値と（ケ）のずれは標本抽出に伴う誤差であり（コ）と呼ばれる。」

<選択肢>

1. 推定量, 2. 母集団, 3. 標本抽出, 4. 標本分布, 5. 母数, 6. 標本平均, 7. 推定値, 8. 標本統計量, 9. 母平均, 10. 標本誤差, 11. 標本

（ア）2, （イ）11, （ウ）3, （エ）5, （オ）8

（カ）9, （キ）6, （ク）1, （ケ）7, （コ）10

問題Ⅱ

次の用語について説明せよ。

1. 標本分布

標本統計量に関する確率分布。標本分布は度数分布ではなく、確率分布である。標本分布は母集団分布と標本統計量の種類とサンプルサイズが決まると理論的（数学的）に求まるものであり、標本抽出されたデータから作成されるものではない。

2. 確率変数

ある事象における変数で、値を確定できないが、その出現頻度や振る舞いは確率的表すことができる。一例として、サイコロの目がある。n回目に出るサイコロの目は確定できないが、多数回振れば、1の目は1/6回出ることが期待できる。

3. 単純無作為抽出

母集団からデータを抽出するときに、全てのデータが平等に選ばれる可能性がある標本抽出の方

法.

4. 確率分布 (離散変数, 連続変数)

ある確率変数がどのような値をどのような確率でとるかを表した分布. 確率変数が離散変数の場合は確率分布が確率そのものを表す. 連続変数の場合は, 確率そのものではなく, 確率密度を表す. 確率変数がある範囲の値をとる確率が面積で与えられる.

問題Ⅲ

数学の得点は $N(\mu, \sigma^2) = N(6, 4)$ に従うことが知られている. 次に示す 10 名の点数はこの母集団からの無作為抽出と考えて良いか検定せよ.

数学の点数 : 5, 7, 6, 8, 4, 7, 5, 8, 6, 7

1. 帰無仮説と対立仮説を求めよ.

帰無仮説 : 10 名の数学の点数は $N(\mu, \sigma^2) = N(6, 4)$ からの無作為抽出である.

(または) 母集団の平均は 6 である.

対立仮説 : 無作為抽出ではない. (または) 母集団の平均は 6 ではない.

2. 片側検定か両側検定かを理由を付して述べよ.

母集団の平均が 6 より大きくても, 小さくても棄却されるので両側検定である.

3. 検定統計量 Z を求めよ (式で示せ). 但し, 標本平均を \bar{X} , サンプルサイズを n とする.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

4. 検定統計量の実現値を求めよ. 但し, $\sqrt{10} = 3.162$ とする.

手計算により, $\bar{X} = 6.3$ を求める. これを 3 の式に代入する.

$$Z = 0.474$$

5. 検定統計量に従う確率分布を求めよ.

平均=0, 分散=1 である (標準) 正規分布 : $N(0,1)$

6. 有意水準 5%に対する棄却域を求めよ.

但し, 下記にある「表 関数とその値」を参考にすること.

両側検定であるから, 5%を下側 2.5%, 上側 2.5%に分ける. 標準正規分布 $N(0,1)$ で確率が 2.5%となる下側の検定統計量 Z の値は $qnorm(0.025) = -1.959964$ で与えられる. 確率分布は左右対称であるから上側の値は 1.959964 となる. 従って, 棄却域は次のようになる.

$$Z < -1.959964, 1.959964 < Z$$

7. 検定結果を理由を付して示せ。(帰無仮説が棄却される/されない. その結果, ○○○○であるとは言える/言えない)

検定統計量の実現値 $-1.959964 < Z = 0.474 < 1.959964$ となり, 棄却域にないので帰無仮説は棄却されない(採択される). 従って, 10名の数学の点数は $N(6, 4)$ に従う母集団からの無作為抽出であるといえる.

表 関数とその値

関数	p	df	関数の値
qnorm(p)	0.025	-	-1.959964
	0.05	-	-1.644854
qt(p, df)	0.025	8	-2.306004
		9	-2.262157
		10	-2.228139
	0.05	8	-1.859548
		9	-1.833113
		10	-1.812461

問題IV

以下に示す数学の得点と英語の得点の間に相関があるかを無相関検定により調べよ.

学生ID	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学得点	5	7	6	4	8	6	9	5	7	6
英語得点	6	7	5	6	9	7	8	4	8	7

1. 帰無仮説と対立仮説を求めよ.

帰無仮説: 数学と英語の得点には相関がない (相関係数=0)

対立仮説: 数学と英語の得点には相関がある (相関係数 $\neq 0$)

2. 片側検定か両側検定かを理由を付して述べよ.

相関係数がプラス側, マイナス側のいずれにずれても(正負の)相関が発生し, 帰無仮説は棄却されるので, 両側検定である.

3. 検定統計量 t を求めよ(式で示せ). 但し, 標本相関係数を r , サンプルサイズを n とする.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

4. 検定統計量 t の実現値を求めよ. 但し, $r = 0.7413$, $\sqrt{1-r^2} = 0.6712$, $\sqrt{8} = 2.828$ とする.

上記の数値を3の式に代入して計算する. $t = 3.12$

5. 検定統計量 t が従う確率分布を求めよ.

自由度が $n - 2 = 8$ の t 分布

6. 有意水準 5%に対する棄却域を求めよ.

但し, 問題Ⅲにある「表 関数とその値」を参考にすること.

両側検定であるから, 5%を下側 2.5%, 上側 2.5%に分ける. 自由度が 8 の t 分布で確率が 2.5% となる検定統計量 t の下側の値は $qt(0.025, 8) = -2.306004$ で与えられる. 確率分布は左右対称であるから, 上側の値は 2.306004 である. 従って, 棄却域は次のようになる.

$$t < -2.306004, \quad 2.306004 < t$$

7. 検定結果を理由を付して示せ. (帰無仮説が棄却される/されない. その結果, ○○○○であると言える/言えない)

検定統計量の実現値 $t = 3.12 > 2.306004$ であるから棄却域にあり, 帰無仮説は棄却される. 従って, 数学と英語の得点の間には 5%の有意水準で相関があると言える (相関係数は 5%水準で有意である).

問題V

次の関数で計算される (処理される) 内容を述べよ.

1. $dnorm(x, mean, sd)$

平均= $mean$, 標準偏差= sd の正規分布を求める関数 (確率密度関数). x は確率変数.

2. $rnorm(n, mean, sd)$

平均= $mean$, 標準偏差= sd の正規分布に従う乱数を n 個発生する関数.

3. $pnorm(q)$

標準正規分布において, 確率変数 (検定統計量) が $Z < q$ となる確率を求める関数.

4. $pt(q, df)$

自由度が df である t 分布において, 確率変数 (検定統計量) が $t < q$ となる確率を求める関数.

5. $qchisq(p, df)$

自由度が df のカイ二乗分布において, 確率が $P(0 < X^2 < q) = p$ となる確率変数 (検定統計量) q を求める関数.

6. $pchisq(q, df)$

自由度が df のカイ二乗分布において, 確率変数 (検定統計量) が $0 < X^2 < q$ となる確率を求める関数.