平成２４年度「確率と統計」
達成度確認試験問題（火曜クラス）

2012.7.31(火)

＊数値計算においては，計算を有効数字３桁程度で行い，結果を有効数字２桁～３桁で示せ．

配点：正解（○）：1 点／設問，解答が正解に近い場合（△）：0.5 点／設問
合計点：31 点（答案用紙に記載）→　成績評価の際に 40 点満点に換算

問題Ⅰ（10 点満点）

次の文章の空欄に下欄から適当な語句を選択せよ．答案用紙に番号を記入せよ．

「推測統計では，非常に大規模なデータ全体の統計的性質について，その一部を取り出したデータから推測することが行われる．データ全体を（ア），一部を取り出したデータを（イ），取り出すことを（ウ）という．（ア）の統計量を（エ）という．標本データから計算される統計量を（オ）という．（ア）の平均は（カ），（イ）の平均は（キ）という．ある母数を推定するために用いられる標本統計量を（ク），その値を（ケ）という．母数の値と（ケ）のずれは標本抽出に伴う誤差であり（コ）と呼ばれる．」

＜選択肢＞

1. 推定量，2. 母集団，3. 標本抽出，4. 標本分布，5. 母数，6. 標本平均，7. 推定値，8. 標本統計量，9. 母平均，10. 標本誤差，11. 標本

（ア）2,（イ）11,（ウ）3,（エ）5,（オ）8
（カ）9,（キ）6,（ク）1,（ケ）7,（コ）10

問題Ⅱ（3 点満点）

正規母集団の母平均の推定に関して以下の問いに答えよ．

１．正規分布$N(\mu,\sigma^2)$に従う母集団からn個の標本を無作為に抽出したときの標本分布を求めよ．

$$N(\mu,\sigma^2/n)$$

２．標準誤差を求めよ．

$$\sigma/\sqrt{n}$$

３．標本平均は母平均の推定量であるが，その精度を高めるにはどのようにしたらよいか述べよ．

精度を上げるためには，標準誤差$\sigma/\sqrt{n}$を小さくする必要がある．σは母数であるから，調整できない．このため，精度を上げるためには，サンプルサイズnを大きくする．

問題Ⅲ（7 点満点）

数学の得点は平均が 7 の正規分布に従うことが知られている．次に示す 10 名の点数はこの母集団からの無作為抽出と考えて良いか検定せよ．

数学の点数：5，　7，　4，　8，　6，　5，　9，　7，　6，　8

1．帰無仮説と対立仮説を求めよ．

帰無仮説：10 名の数学の点数は平均が 7 の正規母集団からの無作為抽出である．

（無作為抽出した正規母集団の平均は 7 である）

対立仮説：10 名の数学の点数は平均が 7 の正規母集団からの無作為抽出ではない．

（無作為抽出した正規母集団の平均は 7 ではない）

2．片側検定か両側検定かを理由を付して述べよ．

平均が 7 より大きくても，小さくても棄却されるので両側検定である．

3．検定統計量tを求めよ（式で示せ）．但し，標本平均を$\bar{X}$，不偏分散を$\hat{\sigma}^2$とする．

分散が不明であるので，次の検定統計量を用いる．

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

4．検定統計量tの実現値を求めよ．但し，$\hat{\sigma} = 1.5811$，$\sqrt{10} = 3.1623$とする．

与えられた標本データから$\bar{X}$を手計算で求める．

$$\bar{X} = 6.5$$

次に，３の式を計算する．

$$t = -1.0$$

5．検定統計量tが従う確率分布を求めよ．

自由度が$n - 1 = 9$のt分布

6．有意水準 5%に対する棄却域を求めよ．但し，下記の「表　関数とその値」を参考にすること．

両側検定であるから，下側確率=2.5%，上側確率=2.5%とする．検定統計量が自由度=9 の t 分布に従うので，下側確率=2.5%に対する境界値は表より qt(0.025, 9)=-2.262157 となる．

以上より，棄却域は次のようになる．

$$t < -2.262157,\quad 2.262157 < t$$

7．検定結果を理由を付して示せ．(帰無仮説が棄却される/されない．その結果，○○○○であるとは言える/言えない)

検定統計量の実現値$t = -1.0$は棄却域に含まれないので，帰無仮説は棄却されない．従って，10 名の数学の得点は，有意水準 5%において平均=7 の正規母集団からの無作為抽出である．

表　関数とその値

関　数	p	df	関数の値	関　数	p	df	関数の値
qt(p, df)	0.025	8	-2.306004	qchisq(p,df)	0.95	1	3.841459
		9	-2.262157			2	5.991465
		10	-2.228139			3	7.814728
	0.05	8	-1.859548		0.05	1	0.00393214
		9	-1.833113			2	0.1025866
		10	-1.812461			3	0.3518463

問題Ⅳ（7 点満点）

以下のクロス集計表に関して，数学の好き嫌いと英語の好き嫌いの連関（or 独立性）を検定せよ．

		英語		計
		好き	嫌い	
数学	好き	7	5	12
	嫌い	4	4	8
計		11	9	20

1．帰無仮説と対立仮説を求めよ．

帰無仮説：数学の好き／嫌いと，英語の好き／嫌いの間には連関がない（独立である）．

対立仮説：数学の好き／嫌いと，英語の好き／嫌いの間には連関がある（独立でない）．

2．片側検定か両側検定かを理由を付して述べよ．

独立性の検定にはカイ二乗検定を用いる．カイ二乗は正の値を取り，連関が低いと小さな値となり，連関が高いと大きな値となる．従って，片側検定となる．

3．検定統計量X^2を求めよ（式で示せ）．但し，観測度数をO_i，期待度数をE_iとする．

$$X^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \cdots + \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

4．検定統計量X^2の実現値を求めよ．

観測度数を$O_{11} = 7$, $O_{12} = 5$, $O_{21} = 4$, $O_{22} = 4$とする．

これらに対する期待度数を求める．

$$\mathrm{E}_{11} = \frac{12 \times 11}{20} = 6.6, \quad E_{12} = \frac{12 \times 9}{20} = 5.4, \quad E_{21} = \frac{8 \times 11}{20} = 4.4, \quad E_{22} = \frac{8 \times 9}{20} = 3.6$$

これらを３の式に代入してX^2を求める．

$$X^2 = 0.135$$

5．検定統計量X^2が従う確率分布を求めよ．

自由度が(行の数－１)×(列の数－１)＝(２－１)×(２－１)＝１であるカイ二乗分布

6．有意水準 5%に対する棄却域を求めよ．

但し，問題Ⅲにある「表　関数とその値」を参考にすること．

片側検定であり，境界値より大きい領域が棄却域であるから，自由度＝１のカイ二乗分布において上側 5%が棄却域になる．従って，表より$\mathrm{qchisq}(0.95, 1) = 3.841459$が境界値になり，棄却域は次のようになる．

$$3.841459 < X^2$$

7．検定結果を理由を付して示せ．(帰無仮説が棄却される/されない．その結果，○○○○であるとが言える/言えない)

検定統計量$X^2 = 0.135$は棄却域に含まれないから，帰無仮説は採択される．すなわち，数学の好き／嫌いと英語の好き／嫌いには 5%の有意水準で連関がないといえる．

問題Ｖ（4 点満点）

次の関数で計算される（処理される）内容を述べよ．

1．dnorm(x, mean, sd)

平均＝mean，標準偏差＝sd の正規分布（確率密度関数）を表す．x は確率変数．

2．rnorm(n, mean, sd)

平均＝mean，標準偏差＝sd の正規分布から n 個の乱数を抽出する．

3．pnorm(q)

標準正規分布において下側確率を求める．

標準正規分布において確率変数（検定統計量）が$Z < q$の値をとる確率を求める．

4．pt(q, df)

t 分布において下側確率を求める．

自由度が df の t 分布において，確率変数（検定統計量）が$t < q$の値をとる確率を求める．