

10

10.95

12

14.4

9

8

7

20.74

9

8

7

まえがき

デジタル信号処理の歴史は 1960 年代まで遡る。初めは、コンピュータを使ってオフラインで信号処理を行うことを目的としていた。その後、LSI 技術の発達によりハードウェアの処理速度が上がり、専用 LSI による実時間処理が可能となってきた。さらに、デジタル信号処理に特化したデジタルシグナルプロセッサ (DSP) の発達により、デジタル信号処理の実時間処理が広範囲で行われるようになった。現在、音声、音響帯域では DSP による実時間処理が主流になっている。DSP は多量の積和演算が高速に行えるように工夫されているが、基本的には命令コードによって制御されるコンピュータであるため、実現できる処理は多種多様である。しかし、デジタル信号処理の骨格となるのは線形・時不変な信号処理である。この信号処理は信号やシステムのフィルタリング、予測、推定、復元、等化といった重要な処理をカバーしている。また、その応用分野は、計測、制御、通信、音声・画像・映像処理など非常に広範囲に及んでいる。

最近の信号処理を取り巻く状況も大きく変わっている。マルチメディア、モバイル、インターネットというキーワードで表されるように、固有の情報表現からデジタル信号による統一的な表現へ、固定端末からモバイル端末へ、専用通信システムから汎用的なインターネット環境へと大きな転換期を迎えている。このような環境下では、いつでも、何処でも、誰とでも、多様で高品質な情報を自由にやりとりすることが求められている。別の見方をすると、多様な環境下で高品質な情報が要求されているといえる。このために、デジタル信号は一層重要な技術となってきている。

本書では、線形・時不変なデジタル信号処理を主として扱う。情報源や情報を感じる生体器官はほとんどがアナログであるため、まず、アナログ (連続

時間) 信号の標本化について述べる。次に、離散時間信号やシステムの数学的な表現、及び処理過程の扱いと表現法について学ぶ。デジタルコンピュータでは全ての情報が標本化されるため、周波数領域の標本化を取り上げる。これは、高速フーリエ変換 (FFT) に繋がる技術である。デジタルフィルタの設計法については、無限長インパルス応答 (IIR) フィルタと有限長インパルス応答 (FIR) フィルタについて基本的な方法を取り上げる。デジタルフィルタの構成法としては、基本構成の他に、複数の標本化周波数を含むマルチレートフィルタ、及び帯域分割形の信号処理について述べる。雑音に関しては、統計的な表現法を学び、その上で、雑音の伝達及び時間領域と周波数領域の解析方法について学ぶ。最後に、最近重要性を増している適応フィルタの基礎とその代表的な応用例を述べる。

本書は、高専、大学においてデジタル信号処理を学ぶ学生の教科書として、また、企業においてデジタル信号処理を学び、具体的に適用しようとする技術者までを対象としている。デジタル信号処理の特徴は、理論的な特性がそのまま実現される場合が多いという点である。「実験してみないと分からない」部分は少ない。その点からも、単なるノウハウではなく、理論をしっかりと身に付けてほしい。各章には、多くの演習問題をつけた。学んだ事項の理解を深める基本問題の他に、実際に応用する場面も想定したり、複数の章にまたがる問題もあり、応用力が身に付くように配慮されている。本書が、多くの人がデジタル信号処理を理解し、実践するための一助となれば望外の幸せである。

中山 謙二

目次

1. 離散時間信号とシステム

1.1	離散時間信号	1
1.2	線形シフト不変システム	2
1.2.1	線形性	3
1.2.2	シフト(時間)不変	3
1.2.3	インパルス応答	5
1.2.4	畳み込み和	5
1.3	線形シフト不変システムの基本構成	6
1.3.1	構成要素	6
1.3.2	基本回路	7
1.4	安定性と因果性	8
1.4.1	安定性	8
1.4.2	因果性	10
1.5	離散時間信号とシステムの周波数特性	11
1.5.1	複素正弦波に対する応答	11
1.5.2	実正弦波に対する応答	13
1.5.3	複数の正弦波に対する応答	14
1.5.4	離散時間信号のフーリエ変換	15
1.5.5	信号の周波数解析法のまとめ	15
1.5.6	畳み込み和の周波数領域での表現	17
1.5.7	フーリエ変換対の性質	18
1.6	連続時間信号の標本化	19
1.6.1	標本化による周波数特性の変化	19
1.6.2	内挿と標本化定理	20
1.6.3	アナログとのインターフェイス	23
1.7	演習問題	25

2. z 変換と伝達関数

2.1	z 変換の基礎	27
2.1.1	z 変換	27
2.1.2	収束領域	27
2.1.3	z 変換の極と零点	29
2.1.4	数列と収束領域	30
2.2	z 変換とフーリエ変換及び物理的実現性	31
2.2.1	z 変換とフーリエ変換	31
2.2.2	z 変換と物理的実現性	31
2.2.3	z 変換の位置づけ	33
2.3	z 変換の性質	33
2.3.1	右側数列の収束領域	34
2.3.2	線形性と数列のシフト	34
2.3.3	その他の性質	35
2.3.4	畳み込み和	36
2.3.5	パーセヴァルの関係	37
2.4	逆 z 変換	38
2.4.1	未定係数法	38
2.4.2	部分分数展開	39
2.4.3	逆 z 変換の一般式	40
2.5	伝達関数	42
2.5.1	伝達関数の表現	42
2.5.2	零点と極	44
2.5.3	伝達関数と周波数特性	45
2.6	伝達関数を中心とした諸概念の関連	46

3. 離散フーリエ変換

3.1	離散フーリエ変換の導出	57
3.1.1	フーリエ変換の標準化	57
3.1.2	離散フーリエ変換のまとめ	59
3.1.3	フーリエ変換の標準化による時間信号の変化	59

3.1.4	周波数領域における標本化定理	60
3.1.5	標本化周波数, 標本間隔, 標本点数の決め方	61
3.1.6	連続時間信号のフーリエ変換から離散フーリエ変換までの関係	63
3.2	離散フーリエ変換の性質	65
3.2.1	線形性と循環シフト	65
3.2.2	循環畳み込み和	67
3.3	離散フーリエ変換による線形畳み込み和	67
3.3.1	線形畳み込み和	67
3.3.2	有限長信号の場合	69
3.3.3	無限長数列の場合	70
3.4	演習問題	71
3.5	附録	75
3.5.1	連続時間信号のフーリエ変換	75
3.5.2	ラプラス変換と z 変換の関係	79
3.5.3	基本演算, 基本関数のラプラス変換	83

4. 離散フーリエ変換の計算法

4.1	離散フーリエ変換の直接計算	84
4.2	高速フーリエ変換 (FFT)	84
4.2.1	周波数間引き radix2 FFT アルゴリズム	84
4.2.2	FFT の特徴	94
4.2.3	時間間引き FFT アルゴリズム	96
4.2.4	radix4-FFT アルゴリズム	97
4.3	逆 FFT	99

5. IIR デジタルフィルタの設計法

5.1	デジタルフィルタの設計	102
5.1.1	設計フローチャート	102
5.1.2	回路形式の特徴	102
5.2	アナログフィルタの伝達関数	104
5.2.1	バターワースフィルタ	104
5.2.2	チェビシェフフィルタ	107

5.2.3	楕円フィルタ	110
5.2.4	重み付等リップル近似	111
5.3	インパルス応答不変変換	111
5.3.1	インパルス応答の標本化	111
5.3.2	伝達関数の設計	112
5.3.3	s 平面から z 平面への写像	113
5.3.4	設計例	114
5.4	双 1 次 z 変換	115
5.4.1	s-z 変換式の導出	115
5.4.2	s 平面と z 平面の写像関係	117
5.4.3	デジタルフィルタの設計手順	118
5.4.4	設計例	118
5.5	演習問題	118
5.6	附録	119
5.6.1	アナログフィルタの極と安定性の関係	119
6. FIR デジタルフィルタの設計法		
6.1	線形位相 FIR フィルタ	121
6.1.1	線形位相特性	121
6.1.2	入出力波形の関係	121
6.1.3	伝達関数の一般形	124
6.1.4	線形位相 FIR フィルタの零点配置	124
6.1.5	応用例	127
6.2	時間窓による FIR フィルタ設計法	127
6.2.1	設計手順	128
6.2.2	時間窓による周波数特性の変化	129
6.3	周波数サンプリング法	131
6.3.1	設計手順	131
6.3.2	標本値による伝達関数の表現と回路構成	133
6.3.3	遷移帯域の標本値の決め方	136
6.3.4	設計例	136
6.4	逐次的な等リップル (チェビシェフ) 近似法	136

6.5	最小位相, 最大位相 FIR フィルタの設計法	138
6.5.1	零点配置	138
6.5.2	設計法	140
6.6	演習問題	140

7. デジタルフィルタの回路構成

7.1	回路構成の基本方針	143
7.1.1	構成要素	143
7.1.2	回路構成のポイント	143
7.1.3	回路構成の基本的な考え方	143
7.2	伝達関数を直接表現する回路形式	146
7.2.1	直接構成 (高次多項式)	146
7.2.2	縦続構成 - 2 次因数分解	147
7.2.3	部分分数展開による並列構成	148
7.2.4	連分数展開によるはしご形構成	149
7.2.5	格子形回路	149
7.2.6	回路形式の比較	151
7.3	マルチレートフィルタ	152
7.3.1	レート変換フィルタ	152
7.3.2	TDM/FDM 変換	156
7.4	演習問題	157

8. 量子化誤差の解析と低減法

8.1	確率過程の解析	161
8.1.1	確率過程の性質	161
8.1.2	確率過程の周波数解析	162
8.1.3	確率変数に対する線形システムの応答	165
8.2	量子化誤差の種類と分布	168
8.2.1	2 進数の表現	168
8.2.2	量子化誤差の発生	169
8.3	内部信号の量子化による雑音	176
8.3.1	スケーリング	176

8.3.2	オーバーフローの補正法	179
8.4	デジタルフィルタの出力雑音の解析	180
8.4.1	量子化誤差の伝達	180
8.4.2	デジタルフィルタにおける出力雑音	182
8.4.3	出力雑音の低減	185
8.5	演習問題	185
8.6	附録	190
8.6.1	サイコロを用いた確率過程の説明	190
8.6.2	自己相関とフーリエ変換	191
8.6.3	信号和の電力	193
8.6.4	浮動小数点演算における量子化誤差	195

1

離散時間信号とシステム

本章ではデジタル信号処理の基礎であるアナログ（連続時間）信号の標本化とその表現方法及び標本化された信号 (Discrete Time Signals) を処理するシステムの基礎について学ぶ。

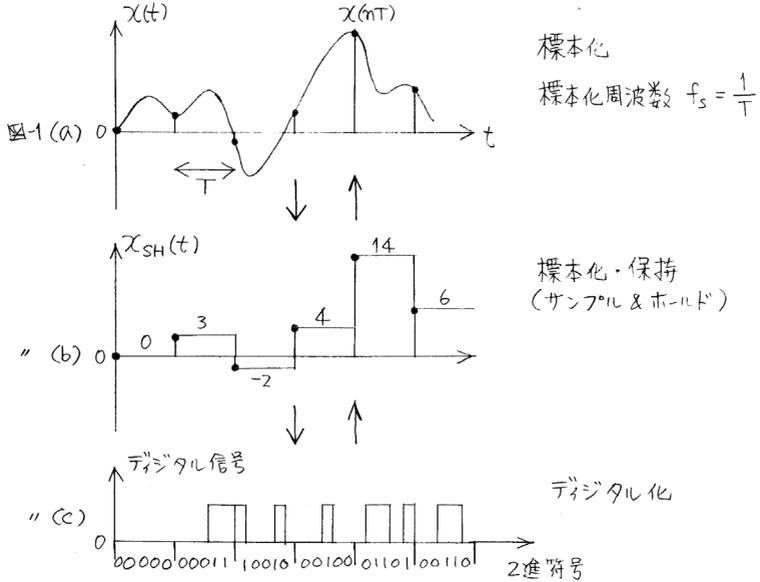
1.1 離散時間信号

音声や画像，映像等は発生時や人間による認識時ではアナログ信号として扱われる。これは時間方向も大き方向も連続な信号である。これらをデジタル化して処理するためには，まず標本化される。

図 1.1 にアナログ（連続時間）信号 (Continuous Time Signals) が標本化される過程を示す。同図 (a) が連続時間信号 $x(t)$ 及び T 秒間隔の標本値 $x(nT)$ ，(b) がサンプルホールドされた信号 $x_{sh}(t)$ ，(c) が標本値 $x(nT)$ を 2 進符号，すなわちデジタル信号で表現したものである。(c) のデジタル表現は，標本値 $x(nT)$ のみを取り出した (d) の波形と等価である。(d) の波形は，(c) のデジタル信号に対応する表現であり，物理的に実現できるものではない。すなわち，幅が零で高さ有限のパルス波形は物理的に実現できない。本書では，離散時間信号の表現として (d) の波形表現を用いる。

標本間隔 T [秒] は共通な場合が多く， $T = 1$ と正規化して， $x(nT)$ を $x(n)$ と表す。 T の逆数は 1 秒間に標本化されるサンプル数を表しており，標本化周波数と呼ばれる。ここでは， f_s と表す。

$$f_s = \frac{1}{T} \quad \text{Hz} \quad (1.1)$$



◇ 離散時間信号

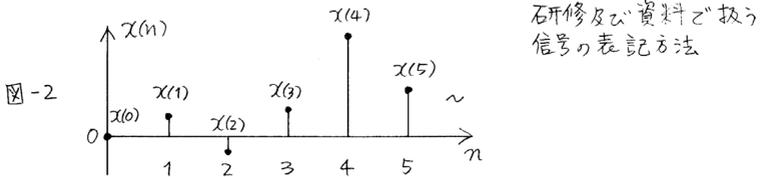


図 1.1 連続時間信号の標本化とデジタル信号

1.2 線形シフト不変システム

本書では、主として線形で時間的に変化しないシステム (Linear Shift-Invariant Systems) を対象とする。図 1.2 に示すように、システムの入力を $x(n)$ 、出力を $y(n)$ とする。これらの関係は一般的に次のように表される。

$$y(n) = F[x(n)] \tag{1.2}$$

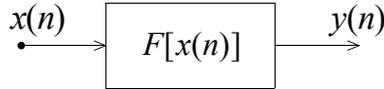


図 1.2 線形システム

1.2.1 線形性

入力信号 $x_1(n)$, $x_2(n)$ に対する出力信号を $y_1(n)$, $y_2(n)$ とするとき, 入力の線形結合に対して出力も線形結合になるとき, 関数 $F[\]$ による変換は線形であるという。

$$y_1(n) = F[x_1(n)] \quad (1.3)$$

$$y_2(n) = F[x_2(n)] \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= F[ax_1(n) + bx_2(n)] = aF[x_1(n)] + bF[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ここで, a , b は時間や入出力信号によって変化しない任意の定数である。

(例) a , b を定数とする。

1. 線形

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1) \quad (1.6)$$

$$y(t) = dx(t)/dt \quad (1.7)$$

2. 非線形

$$y(n) = ax^2(n) \quad (1.8)$$

$$y(n) = ax(n) + b \quad (1.9)$$

他の非線形特性として, 加算器のオーバーフロー, アナログ回路ではコイルや増幅器における波形歪みがある。

図 1.3 に例を図示する。

1.2.2 シフト(時間)不変

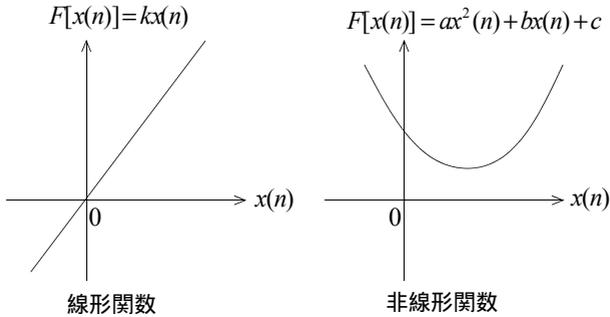


図 1.3 線形関数及び非線形関数の例

入力を k サンプル時間軸方向にシフトしたとき $x(n) \rightarrow x(n-k)$ ，出力も同様に k サンプルシフトされるとき $y(n) \rightarrow y(n-k)$ ，すなわち，入出力関係が時間によって変化しないとき，このシステムはシフト（時間）不変であるという。

$$y(n) = F[x(n)] \quad \text{ならば}$$

$$y(n-k) = F[x(n-k)] \quad (1.10)$$

この様子を図 1.4 に示す。

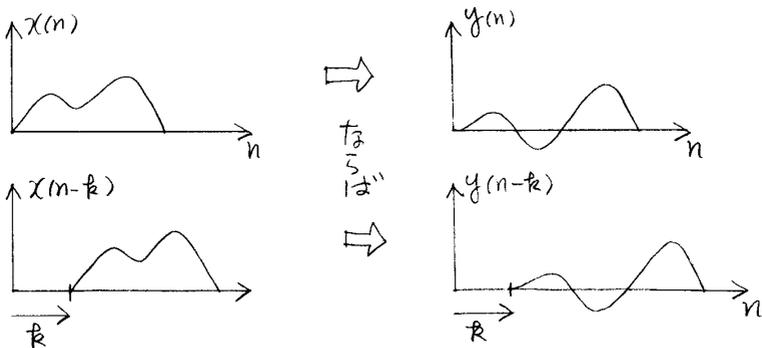


図 1.4 シフト（時間）不変システムの入出力関係

入出力関係が

$$y(n) = ax(n) + bx(n - 1) \tag{1.11}$$

と表されるとき、 a, b による定数倍や $x(n - 1)$ による 1 サンプル遅延の処理が時間によって変化しない場合がシフト（時間）不変である。

1.2.3 インパルス応答

図 1.5 に示すように、次のインパルス $\delta(n)$ を入力したときのシステムの出力 $h(n)$ をインパルス応答という。

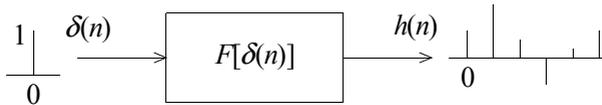


図 1.5 インパルス応答

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$h(n) = F[\delta(n)] \tag{1.13}$$

1.2.4 畳み込み和

システムが線形シフト不変であるとき、入出力関係はインパルス応答 $h(n)$ で完全に表すことができる。まず、任意の離散時間信号 $x(n)$ はインパルス $\delta(n)$ の線形結合として次のように表される。

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \tag{1.14}$$

n はサンプリング時間である。 $x(n)$ が時間の関数であるのに対して、 $x(k)$ は標本値であり時間 n に対しては定数である。また、 $\delta(n - k)$ はインパルスを k サンプル遅らせたものであるが、やはり時間の関数である。上式及び線形シフト不変の性質を用いて入出力関係を求める。

$$y(n) = F[x(n)]$$

$$= F \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \right] \quad (1.15)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta(n-k)] \quad \text{線形性} \quad (1.16)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad \text{シフト不変性} \quad (1.17)$$

この関係は加算変数を入れ替えることにより次のように表される。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-l)h(l) \quad (1.18)$$

$$l = n - k \quad (1.19)$$

さらに、インパルス応答 $h(n)$ が有限長 ($0 \leq n \leq N-1$) の場合は、次のようになる。

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (1.20)$$

これを畳み込み和という。畳み込み和は線形シフト不変システムにおいて成り立つ関係であることに留意されたい。また、線形シフト不変システムの入出力関係はインパルス応答で完全に規定されること、すなわちインパルス応答がシステムの全ての情報を有していることにも留意されたい。インパルス応答は後で述べるシステムの周波数特性や伝達関数に1対1対応する。

1.3 線形シフト不変システムの基本構成

1.3.1 構成要素

構成要素を図 1.6 に示す。

乗算器

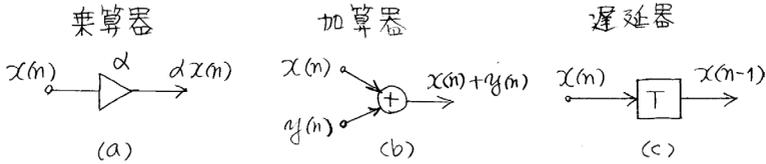


図 1.6 線形シフト不変システムの構成要素

a を乗数とすると

$$y(n) = ax(n) \quad (1.21)$$

加算器

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1.22)$$

遅延器

信号を 1 サンプル遅らせる遅延器。

$$y(n) = x(n-1) \quad (1.23)$$

1.3.2 基本回路

図 1.7 に基本回路の構成例を示す。(a) がフィードフォワードのみを有し、インパルス応答が有限である FIR (Finite Impulse Response) 形回路で、(b) がフィードバックを有し、インパルス応答が無限長となる IIR (Infinite Impulse Response) 形回路である。回路の入出力関係は次のようになる。

FIR 形回路

$$y(n) = h_0x(n) + h_1x(n-1) + h_2x(n-2) \quad (1.24)$$

IIR 形回路

$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \quad (1.25)$$

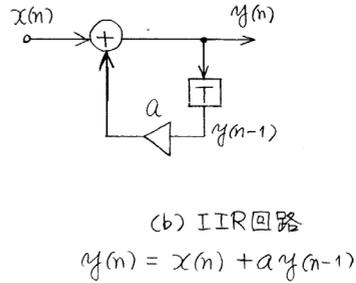
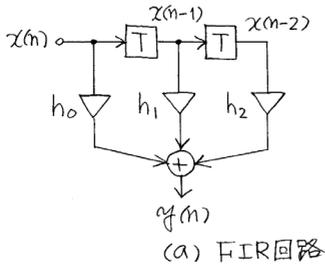


図 1.7 基本回路の構成例。(a)FIR 形回路, (b)IIR 形回路

1.4 安定性と因果性

1.4.1 安定性

「有限な入力に対して, 出力も有限である」ときにシステムは安定であるという。線形シフト不変システムが安定であるための必要十分条件はインパルス応答の絶対値和が有限であることである。

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1.26)$$

(証明)

式 (1.26) が成り立つとき, 有限な $x(n)$ に対して $y(n)$ も有限になることを示す(十分条件)。今, a を有限値として, $|x(n)| \leq a$ が成り立つものとする。このとき, $y(n)$ も次のように有限となる。

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \\ &\leq a \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \end{aligned} \quad (1.27)$$

次に, 式 (1.26) が成り立たないときに安定でないことを示す(必要条件)。 $S = \infty$ に対して $y(n) = \infty$ となる有限な入力信号が存在することを示せばよい。この

ような入力として次式を考える。

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \neq 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

これに対して, $n = 0$ における $y(n)$ は次のように無限大となる。

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = S = \infty \end{aligned} \quad (1.29)$$

(証明終)

上記の証明における後半の例として, $x(n) = 1, h(n) = 1, -\infty < n < +\infty$ がある。

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \infty \quad (1.30)$$

(例題)

1. FIR 形回路はインパルス応答のサンプル数が有限であるから, $|h(n)|$ が有限であれば常に安定である。
2. IIR 形回路は常に安定であるとは限らない。図 1.8 に示す例について考える。インパルス応答は次のようになる。

$$h(n) = \delta(n) + ah(n-1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

$$h(-1) = 0$$

$$h(n) = a^n \quad (1.32)$$

インパルス応答の絶対値和は

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - |a|^N}{1 - |a|} \quad (1.33)$$

従って, $|a| < 1$ のときに S は有限となり, 安定であるが, $|a| \geq 1$ のときは不安定である。安定性に関しては, 後で述べるようにフーリエ変換の可能性や伝達関数の極配置とも関係する。

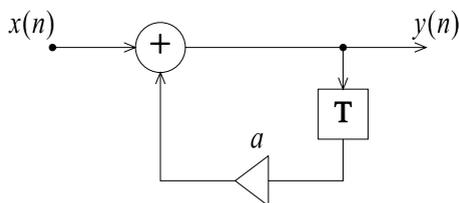


図 1.8 1次フィードバック形回路

1.4.2 因果性

「 $n = n_0$ におけるシステムの出力信号 $y(n)$ が $n \leq n_0$ における入力信号 $x(n)$ のみに依存する」とき、システムは因果性を満たす。これを図 1.9 に示す。言い換えると、原因（入力信号）が入る前に結果（出力信号）が出ることはない。図 1.10 において、 n_0 以前に $y(n)$ が現れることはない。すなわち、結果（出力信号）は原因（入力信号）のみに依存する。システムが遅延器（メモリ）を含む

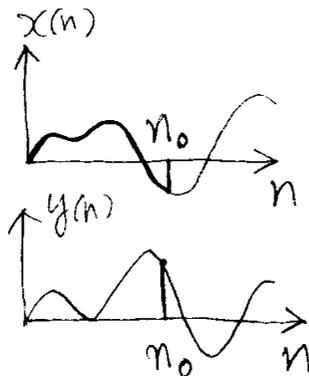


図 1.9 因果性を満たす入出力関係

場合は、信号が入力する以前に遅延器にあるデータが入っていると因果性を満たさない。この場合は、インパルス応答が遅延器のデータによって変化し、一意には定まらない。これは、因果性を満たす線形シフト不変システムでは、インパルス応答がシステムの特徴を完全に規定しているのことに矛盾する。初期

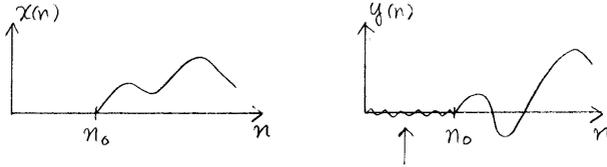


図 1.10 因果性を示す例

状態では、遅延器の内容は全て零にセットされているとする。

線形シフト不変システムの因果性

入力信号が $x(n) = 0, n < 0$ であるとき、線形シフト不変システムが因果性を満たすための必要十分条件は

$$h(n) = 0, n < 0 \quad (1.34)$$

である。

(証明)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m) \quad (1.35)$$

において、 $y(n) = 0, n < 0$ となるためには、 $n < 0$ に対して $h(n-m) = 0$ が必要十分条件である。 $n < 0, m \geq 0$ に対して $n-m < 0$ となるから、式 (1.34) の条件を得る。

1.5 離散時間信号とシステムの周波数特性

1.5.1 複素正弦波に対する応答

図 1.11 に示すように、インパルス応答が $h(n)$ である線形シフト不変システムに正弦波が入力したときの出力信号について考える。入力信号を

$$x(n) = ae^{j(\omega nT + \phi)} \quad (1.36)$$

$$\omega = 2\pi f, \quad f \text{ は周波数}$$

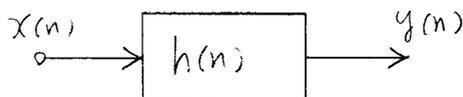


図 1.11 インパルス応答 $h(n)$ を有するシステムの入出力関係

とする。 a が振幅， ω が角周波数， ϕ が位相である。この $x(n)$ を式 (1.18) に代入して，変形する。

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)ae^{j(\omega(n-k)T+\phi)} \\
 &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega kT} \right] ae^{j(\omega nT+\phi)} \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

ここで，

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega kT} \tag{1.38}$$

とおく。 $H(e^{j\omega})$ は ω に対して複素関数であるから，次のような形式で書ける。

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \tag{1.39}$$

$$= |H(e^{j\omega})| \cos \theta(\omega) + j|H(e^{j\omega})| \sin \theta(\omega) \tag{1.40}$$

$$= Re(\omega) + jIm(\omega) \tag{1.41}$$

$$|H(e^{j\omega})| = (Re^2(\omega) + Im^2(\omega))^{1/2} \tag{1.42}$$

$$\tan \theta(\omega) = \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \tag{1.43}$$

$$\sin \theta(\omega) = \frac{Im(\omega)}{|H(e^{j\omega})|} \tag{1.44}$$

$$\cos \theta(\omega) = \frac{Re(\omega)}{|H(e^{j\omega})|} \tag{1.45}$$

$\theta(\omega)$ を式 (1.43) で計算すると $-\pi/2 \leq \theta(\omega) \leq \pi/2$ の範囲でしか求まらないため，式 (1.44) 及び (1.45) から求める必要がある。

式 (1.37) と (1.39) より,

$$y(n) = |H(e^{j\omega})| a e^{j(\omega n T + \phi + \theta(\omega))} \quad (1.46)$$

従って、線形シフト不変システムによる正弦波の変化は表 1.1 のようになり、正弦波の振幅と位相が変化し、周波数は変化しない。 $H(e^{j\omega})$ がシステムの周波数特性である。システムの周波数特性とは、線形シフト不変なシステムに対して定義することができ、正弦波の振幅と位相の変化として表すことができる。

表 1.1 線形シフト不変システムによる正弦波形の変化

	入力信号 : $x(n)$	出力信号 : $y(n)$
振幅	a	$ H(e^{j\omega}) a$
周波数	ω	ω
位相	ϕ	$\phi + \theta(\omega)$

1.5.2 実正弦波に対する応答

次のオイラー公式

$$e^{\pm\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha \quad (1.47)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad (1.48)$$

を利用して次のように変形できる。

$$\begin{aligned} x(n) &= a \cos(\omega n T + \phi) \\ &= \frac{a}{2} e^{j(\omega n T + \phi)} + \frac{a}{2} e^{-j(\omega n T + \phi)} \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$y(n) = H(e^{j\omega}) \frac{a}{2} e^{j(\omega n T + \phi)} + H(e^{-j\omega}) \frac{a}{2} e^{-j(\omega n T + \phi)} \quad (1.50)$$

さらに

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \quad (1.51)$$

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega) \quad (1.52)$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} \quad (1.53)$$

$$H(e^{-j\omega}) = |H(e^{-j\omega})|e^{j\theta(-\omega)} = |H(e^{j\omega})|e^{-j\theta(\omega)} \quad (1.54)$$

であるから,

$$\begin{aligned} y(n) &= |H(e^{j\omega})|\frac{a}{2}e^{j(\omega nT + \phi + \theta(\omega))} + |H(e^{j\omega})|\frac{a}{2}e^{-j(\omega nT + \phi + \theta(\omega))} \quad (1.55) \\ &= |H(e^{j\omega})|a \cos(\omega nT + \phi + \theta(\omega)) \end{aligned}$$

(1.56)

となり、振幅と位相が表 1.1 と同様に变化する。

式 (1.51), (1.52) の説明

先ず、式 (1.42) より、式 (1.51) が成り立つ。

次に、 $Re(\omega)$ は ω の偶関数、 $Im(\omega)$ は奇関数であり、 $\tan(\theta(\omega)) = Im(\omega)/Re(\omega)$ も奇関数である。従って、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \tan\theta(-\omega) &= \frac{Im(-\omega)}{Re(-\omega)} = \frac{-Im(\omega)}{Re(\omega)} \\ &= -\tan\theta(\omega) = \tan(-\theta(\omega)) \end{aligned} \quad (1.57)$$

上式の最初と最後の式を比較することにより、式 (1.52) が成り立つことが分かる。

1.5.3 複数の正弦波に対する応答

畳み込み和は線形であるから、複数の正弦波の和に対する応答は個々の正弦波に対する応答の和になる。次の入力信号

$$x(n) = \sum_{l=1}^L x_l(n) = \sum_{l=1}^L a_l e^{j(\omega_l nT + \phi_l)} \quad (1.58)$$

に対する応答は次のようになる。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{l=1}^L x_l(n-k) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x_l(n-k)$$

$$= \sum_{l=1}^L |H(e^{j\omega_l})| a_l e^{j(\omega_l n T + \phi_l + \theta(\omega_l))} \quad (1.59)$$

1.5.4 離散時間信号のフーリエ変換

式 (1.38) はインパルス応答 $h(n)$, すなわち離散時間信号のフーリエ変換に相当する。一般の離散時間信号 $x(n)$ に対するフーリエ変換対は次式で与えられる。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n T} \quad (1.60)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n T} d\omega T \quad (1.61)$$

インパルス応答のフーリエ変換である $H(e^{j\omega})$ は入力信号の振幅と位相をどのように変化するかを表しており、一般の信号のフーリエ変換はその信号の持っている周波数成分を表している。さらに、フーリエ変換が収束するためには

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.62)$$

が成り立つ必要がある。これは式 (1.26) で与えたシステムの安定条件と同じである。言い換えると、安定なシステムに対して周波数特性を定義できることになる。

1. 正弦波形を入力したときの振幅と位相の変化。
2. インパルス応答のフーリエ変換。

これらは等価である。

1.5.5 信号の周波数解析法のまとめ

1. フーリエ変換

信号が次の条件を満たすとき、フーリエ変換が可能である。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.63)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega T} \quad (1.64)$$

2. フーリエ変換できない場合

(a) 近似解

次の条件が成り立つとき，時間波形のサンプル数 $N \rightarrow \infty$ に対して，フーリエ変換の近似解がある。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (1.65)$$

例えば，図 1.12(左側) に示す $X(e^{j\omega})$ に対する時間波形は $x(n) = \sin(\alpha n)/\alpha n$ となる。 $x(n)$ を表現するサンプル数 N が有限のときは，図 1.12(右側) に示すように，リップルが生じる。 $N \rightarrow \infty$ に対してこのリップルが小さくなる。

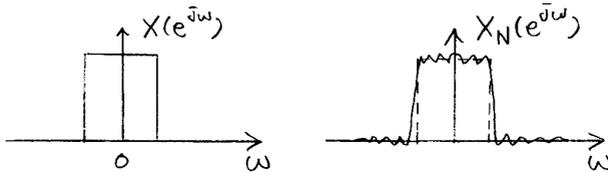


図 1.12 フーリエ変換の近似

(b) フーリエ級数展開

信号が次のような N サンプルを周期とする周期波形の場合は，フーリエ級数に展開され，基本周波数 $f_0 = 1/NT$ の整数倍の周波数成分のみを有する。

$$x(n) = x(n + mN) \quad (1.66)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 T} \quad (1.67)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0, f_0 = \frac{1}{NT} \quad (1.68)$$

(c) 自己相関のフーリエ変換

不規則な時系列はフーリエ変換もフーリエ級数展開もできない。しかし、自己相関の絶対値和が有限となりフーリエ変換できる場合が多い。自己相関のフーリエ変換はスペクトルと呼ばれる。詳しくは、第8章で説明する。

$$\phi(m) = E[x(n)x(n - m)] \tag{1.69}$$

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n)e^{-jn\omega T} \tag{1.70}$$

$E[]$ は期待値を表している。

1.5.6 畳み込み和の周波数領域での表現

$x(n)$, $y(n)$, $h(n)$ のフーリエ変換を $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ とする。式(1.18)の畳み込み和をこれらのフーリエ変換を用いて表す。

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega nT} \tag{1.71}$$

$y(n)$ に式(1.18)を代入する。

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) \right] e^{-j\omega nT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - k)e^{-j\omega nT} \right] \end{aligned} \tag{1.72}$$

$$\tag{1.73}$$

ここで、 $m = n - k$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega mT} \right] e^{-j\omega kT} \\ &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{1.74}$$

このように、時間領域の畳み込みは周波数領域ではかけ算となる。具体例を図1.13に示す。一般に、時間領域と周波数領域では双対な関係がある。

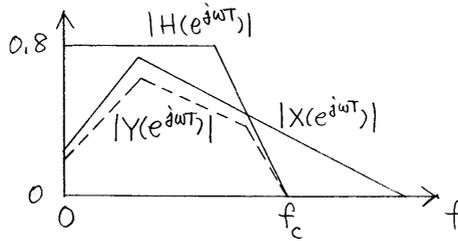


図 1.13 畳み込み和の周波数領域での表現

1.5.7 フーリエ変換対の性質

離散時間信号のフーリエ変換対の性質を表 1.2 に示す。

表 1.2 離散時間信号のフーリエ変換対の性質

時間信号	フーリエ変換
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
$x(n)$ が実信号	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ $Re[X(e^{j\omega})] = Re[X(e^{-j\omega})]$ $Im[X(e^{j\omega})] = -Im[X(e^{-j\omega})]$ $ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ $arg[X(e^{j\omega})] = -arg[X(e^{-j\omega})]$
$x(n)$ の偶数部	$Re[X(e^{j\omega})]: x_e(n)$
$x(n)$ の奇数部	$jIm[X(e^{j\omega})]: x_o(n)$

表中の「*」は複素共役を表している。また、 $x_e(n)$ 、 $x_o(n)$ は次式で与えられる。

$$x_e(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2} \quad (1.75)$$

$$x_e(n) = x_e(-n) \quad (1.76)$$

$$x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2} \quad (1.77)$$

$$x_o(n) = -x_o(-n) \tag{1.78}$$

1.6 連続時間信号の標本化

1.6.1 標本化による周波数特性の変化

連続時間信号を $x(t)$ とし，離散時間信号を $x(n)$ する。例を図 1.14 に示す。

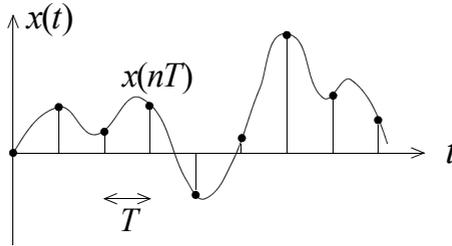


図 1.14 連続時間信号の標本化

$x(t)$ に対しては，次のフーリエ変換対が成り立つ。

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \tag{1.79}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \tag{1.80}$$

$$\tag{1.81}$$

次に， $x(n)$ を $X(j\omega)$ を用いて表す。

$$x(n) = x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega nT} d\omega \tag{1.82}$$

積分区間 $(-\infty, \infty)$ を図 1.15 に示すよう， $2\pi/T$ 周期に区切る。さらに，積分変数 ω を $\omega + 2\pi r/T$ に置換する。

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X(j\omega)e^{j\omega nT} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(j\omega + j\frac{2\pi r}{T})e^{j\omega nT} e^{j2\pi r n} d\omega \end{aligned} \tag{1.83}$$

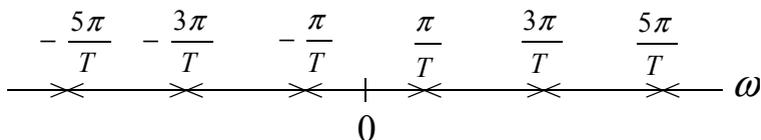


図 1.15 積分区間の区分化

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\frac{2\pi r}{T}) \right] e^{j\omega n T} d\omega \quad (1.84)$$

一方, $x(n)$ はそのフーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ を用いて式 (1.61) より,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n T} d\omega T \quad (1.85)$$

積分変数を ωT から ω に変更する。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T X(e^{j\omega}) e^{j\omega n T} d\omega \quad (1.86)$$

式 (1.84) と (1.86) を比較することにより, 次式を得る。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\frac{2\pi r}{T}) \quad (1.87)$$

この結果から次のことが言える。「標本化された信号 $x(n)$ のフーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ は元の連続時間信号 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(j\omega)$ を周波数軸上で $2\pi r/T, -\infty < r < \infty$ だけシフトして加算したものである。」この様子を図 1.16 に示す。

1.6.2 内挿と標本化定理

標本化を行っても元の情報が保存されている必要がある。そこで, 標本化された信号 $x(n)$ から元の信号 $x(t)$ を復元する過程について考える。

〔1〕 周波数領域における内挿

周波数領域における内挿は, $x(n)$ に対するフーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ から $x(t)$ に対するフーリエ変換 $X(j\omega)$ を得ることに相当する。式 (1.87) において, $r = 0$ の成分のみを取り出す操作に相当する。この様子を図 1.17 に示す。 $x(n)$ を $r = 0$ の部分のみを取り出す理想 LPF である $\Phi(j\omega)$ を通すことにより $X(j\omega)$ を復元

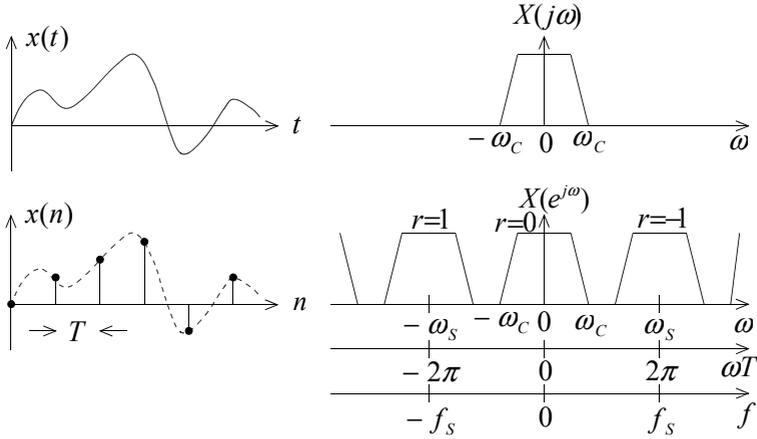


図 1.16 標本化による周波数特性の変化

できる。 $\Phi(j\omega)$ は次式で与えられる。

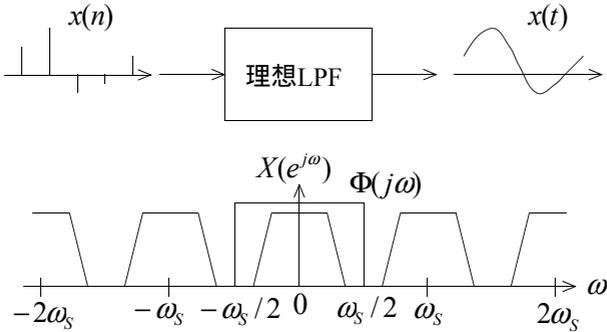


図 1.17 理想フィルタによる内挿 - 周波数領域 -

$$\Phi(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases} \quad (1.88)$$

理想 LPF の出力信号のフーリエ変換は $X(e^{j\omega})$ と $\Phi(j\omega)$ の積となる。

$$X(j\omega) = \Phi(j\omega)X(e^{j\omega}) \quad (1.89)$$

〔2〕 時間領域における内挿

式 (1.89) を時間領域で表現すると畳み込み積分になる。 $\Phi(j\omega)$ のインパルス応答を $\phi(t)$ とする。これは、 $\Phi(j\omega)$ の逆フーリエ変換により求まる。

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.90)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (1.91)$$

理想 LPF の出力信号を $x(t)$ とすると、これは次式で定義される $\phi(t)$ と $x_s(t)$ の畳み込み積分により求まる。

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (1.92)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.93)$$

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (1.94)$$

連続時間信号の畳み込み積分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau) \phi(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \phi(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \phi(t - kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin[(\pi/T)(t - kT)]}{(\pi/T)(t - kT)} \end{aligned} \quad (1.95)$$

上式において、右辺第 1 項が標本値で第 2 項が内挿関数である。 $\delta(t)$ は幅が零で面積が 1 である波形であり、数学的に定義されているが、物理的には存在しない。実際には、幅のあるパルス波形で考える必要がある。これについては、1.6.3 で説明する。

〔3〕 標本化定理

これまでの説明から次のことが言える。「 $|X(j\omega)| = 0, |\omega| > \omega_c$ のとき、標本

化周波数を $2\omega_c < \omega_s$ とすれば、元の連続時間関数 $x(t)$ は標本値 $x(n)$ から完全に復元できる。」

図 1.17 はこの条件を満たす例である。図 1.18 はこの条件を満たさない例である。標本化により周波数特性に重なり (aliasing) が生じており、この部分は理想 LPF を通しても元に戻らない。実際には理想 LPF を作ることはできないので、スプリット帯域 $\omega_c \sim \omega_s - \omega_c$ を設けて LPF を緩やかに実現する。

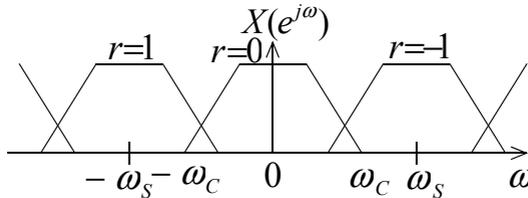


図 1.18 標本化定理を満たさないため、スペクトルの重なりが生じている例

例題

標本化周波数を f_s とする。

1kHz の正弦波を標本化する場合は、 $f_s > 2\text{kHz}$ とする必要がある (等号は含まない)。

4kHz 以上の周波数成分を含まない場合は、 $f_s \geq 8\text{kHz}$ とできる (等号を含む)。

1.6.3 アナログとのインターフェイス

ここまでは、離散時間信号として $x(n)$ 、これと等価な連続時間信号として式 (1.94) で定義された $x_s(t)$ を用いてきた。しかし、この信号は幅が零で面積が 1 である $\delta(t)$ を用いており、物理的には実現できない。一方、デジタル信号は等価的にこの表現に対応する。デジタル信号処理のみを考える場合は $x(n)$ で扱えるが、アナログ/デジタルのインターフェイスを考えると物理的に実現可能な波形で考える必要がある。実際には、図 1.19 に示す標本化・保持 (sample and hold) された信号 $x_{sh}(t)$ を介してアナログ/デジタル変換される。この波形の周波数特性を求める。まず、図 1.20 に示す矩形波形 $h(t)$ の周波数特性を

フーリエ変換で求める。

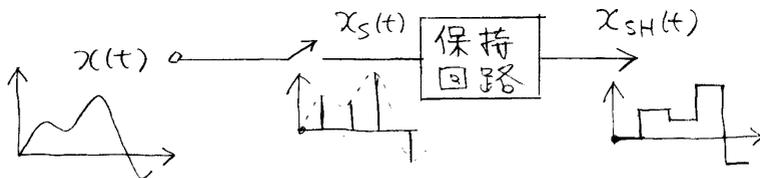


図 1.19 連続時間信号の標本化・保持

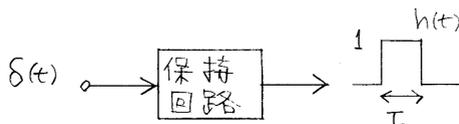


図 1.20 保持回路

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = \tau e^{-j\omega\tau/2} \frac{\sin \tau/2}{\omega\tau/2} \end{aligned} \quad (1.96)$$

式 (1.93) で定義される $\delta(t)$ を $h(t)$ で置き換える。言い換えると、インパルス応答が $h(t)$ である回路に式 (1.94) で定義される $x_s(t)$ を通して $x_{sh}(t)$ が得られる。 $\delta(t)$ のフーリエ変換は 1 であるから、 $x_{sh}(t)$ のフーリエ変換には $H(j\omega)$ が掛けられる。 $x_s(t)$ のフーリエ変換は式 (1.87) で与えられるから、 $x_{sh}(t)$ のフーリエ変換は次式ようになる。

$$\begin{aligned} X_{sh}(j\omega) &= H(j\omega)X_s(j\omega) \\ &= e^{-j\omega\tau/2} \frac{\tau}{T} \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(j\omega + j\frac{2\pi r}{T}) \end{aligned} \quad (1.97)$$

上式の右辺第 1 は $\tau/2$ 秒の時間遅れ，第 2 項 τ/T は 1 周期内のパルス幅の割合 (duty) による振幅変化，第 3 項は幅が τ 秒のパルス波形の周波数特性，第 4 項が標本化による周波数特性を表している。特に，パルス幅 τ が大きいときには第 3 項により，基本帯域 ($|f| \leq f_s/2$) において振幅特性が変化する。これはア

パーチャ効果と呼ばれ補正が必要である。図 1.21 に $X_{sh}(j\omega)$ の振幅特性を示す。この例では、 $\tau = T/2$ (50% duty) である。

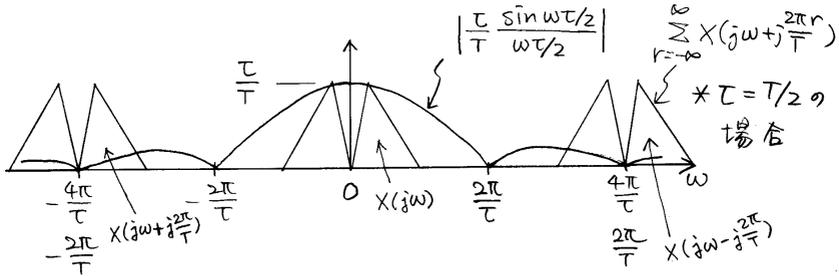


図 1.21 標本化・保持された信号の周波数特性 ($\tau = T/2$ の例)

1.7 演習問題

1. 以下の問に答えよ。

(a) 次の関係 (関数) が線形であることを示せ。

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1), \quad a, b \text{ は定数} \quad (1.98)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.99)$$

(b) 次の関係 (関数) が線形でない (非線形である) ことを示せ。

$$y(n) = ax^2(n), \quad a \text{ は定数} \quad (1.100)$$

$$y(n) = ax(n) + b, \quad a, b \text{ は定数} \quad (1.101)$$

2. ある線形シフト不変回路のインパルス応答を $h(n)$, 入力信号を $x(n)$, 出力信号を $y(n)$ とする。インパルス応答と入力信号が次式で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

$$h(0) = h(1) = 1, \quad h(n) = 0, n \neq 0, 1 \quad (1.102)$$

$$x(0) = x(1) = 1, \quad x(n) = 0, n \neq 0, 1 \quad (1.103)$$

- (a) $y(n)$ を求めよ .
- (b) $h(n)$ のフーリエ変換 $H(e^{j\omega})$ を求めよ .
- (c) $\omega T = 0, \pi/2, \pi$ における $H(e^{j\omega})$ の振幅と位相を求めよ .

3. ある線形シフト不変回路のインパルス応答を $h(n)$, 入力信号を $x(n)$, 出力信号を $y(n)$ とする . インパルス応答が次式で与えられるとき , 以下の問いに答えよ .

$$h(0) = h(1) = 1, \quad h(n) = 0, n \neq 0, 1 \quad (1.104)$$

- (a) $x(n)$ が次式で与えられるとき , $y(n)$ を畳み込み和により求めよ . $n = 0$ から定常応答 (同じ出力が繰り返されるようになる) になるまでの区間で計算すること .

(i) $x(n) = 1, n \geq 0, \quad x(n) = 0, n < 0 \quad (1.105)$

(ii) $x(2n) = 1, \quad x(2n + 1) = -1, n \geq 0 \quad (1.106)$

$$x(n) = 0, n < 0$$

(iii) $x(4n) = 0, \quad x(4n + 1) = 1,$

$$x(4n + 2) = 0, \quad x(4n + 3) = -1, n \geq 0 \quad (1.107)$$

$$x(n) = 0, n < 0$$

- (b) 入力信号が $x(n) = \cos(\omega n T + \phi)$ で与えられるとき , (i) ~ (iii) に対する周波数 (ωT) と位相 (ϕ) を求めよ .
- (c) $h(n)$ のフーリエ変換 $H(e^{j\omega})$ を求めよ .
- (d) (i) ~ (iii) の入力信号の周波数 (ωT) における $H(e^{j\omega})$ の振幅と位相を求めよ .
- (e) (a) で求めた $y(n)$ と , (d) で求めた周波数特性を用いて式 (1.56) から計算される $y(n)$ が定常応答において同じであることを確かめよ .