

2

z 変換と伝達関数

フーリエ変換は複素平面における $e^{j\omega T}$, $0 \leq \omega T < 2\pi$ 上の変換であり、周波数特性を表現することができる。フーリエ変換を複素平面上の任意の点における変換に拡張したものが z 変換である。これにより伝達関数を導くことができ、回路構成、周波数特性、安定性評価、フィルタ設計等を関連づけて扱うことができる。

2.1 z 変換の基礎

2.1.1 z 変換

信号 $x(n)$ の z 変換は次式で定義される。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

z は一般の複素数である。 z を次のように表す。

$$z = e^{\sigma + j\omega T} = r e^{j\omega T}, \quad r = e^{\sigma} \quad (2.2)$$

ωT は $0 \sim 2\pi$ の範囲で変化するものとする。 σ が一定値であるとするとき、 $e^{\sigma + j\omega T} = r e^{j\omega T}$ は半径 $r = e^{\sigma}$ の円となる。すなわち、z 変換はこの円上における変換である。これらの関係を図 2.1 に示す。図中には $0 < r < 1$ ($\sigma < 0$) と $1 < r$ ($0 < \sigma$) の場合を示す。勿論、 $r = 1$ ($\sigma = 0$)、すなわちフーリエ変換も z 変換に含まれることになる。

2.1.2 収束領域

z 変換が収束する条件はフーリエ変換に対する条件から求められる。z 変換を次のように変形する。

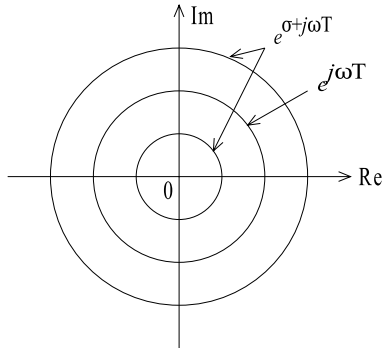


図 2.1 フーリエ変換と z 変換の領域

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega nT} \quad (2.3)$$

上式は、時系列 $x(n)r^{-n}$ に対するフーリエ変換である。従って、収束条件は

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \quad (2.4)$$

z 変換では、 $x(n)$ の絶対値和が有限でなくても、すなわち、 $x(n)$ のフーリエ変換が不可能な場合でも、 r 、すなわち z を適当に選ぶことにより収束できる。z 変換が収束するための z の領域を収束領域という。

(例題) ステップ波形を考える。

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

明らかに、 $x(n)$ の絶対値和は無限大となる。一方、z 変換では

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{-N}}{1 - r^{-1}} \quad (2.6)$$

$|r^{-1}| < 1$ であれば S は有限となる。これが収束領域である。z で表現すると、

$$|e^{j\omega nT}| = 1 \quad (2.7)$$

であるから、 $|z^{-1}| < 1$ あるいは $|z| > 1$ が z 平面における収束領域となる。この例では、半径 1 の円 (単位円) の外側が収束領域であることを意味している。

これを，図 2.2 に示す。このときの z 変換は次のようになる。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (2.8)$$

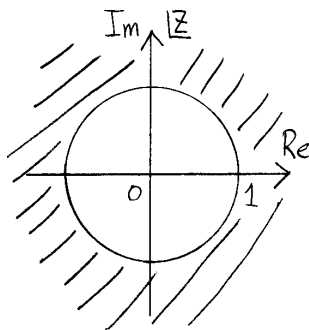


図 2.2 ステップ波形の z 変換が収束する領域

2.1.3 z 変換の極と零点

極： $X(z) = \infty$ をみたす z

零点： $X(z) = 0$ をみたす z

(例題)

$$x(n) = a^n u(n) \quad (2.9)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \quad (2.10)$$

これは等比級数の和であるから， $|az^{-1}| < 1$ のときに次のように収束する。

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (2.11)$$

収束領域は $|z| > |a|$ であり， $|a|$ を半径とする円の外側である。零点と極は各々 $z = 0$ ， $z = a$ である。 z 平面における収束領域及び零点，極を図 2.3 に示す。この図からも分かるように，収束領域の境界は極で与えられる。

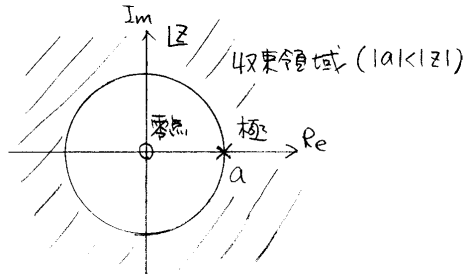


図 2.3 z変換の収束領域

2.1.4 数列と収束領域

〔1〕 有限数列

数列 $x(n)$ は有限値であるとする。

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad (2.12)$$

収束領域としては、 $n_1 < 0$ のとき、 z^p , $p > 0$ の項を含むので $z = \infty$ を除き、 $n_2 > 0$ のときは z^p , $p < 0$ の項を含むので $z = 0$ を除く。

〔2〕 右側数列

ある時刻から、時間が進む方向に展開する数列である。

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad n_1 < \infty \quad (2.13)$$

「右側数列の z 変換の収束領域はある半径の円の外側である」

(証明)

今 $z = z_1$ が収束領域にあるとする。

$$S = \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty \quad (2.14)$$

$n_1 \geq 0$ のとき、 $|z| > |z_1|$ を満たす z に対して次式が成り立つから収束する。

$$S = \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty \quad (2.15)$$

$n_1 < 0$ の場合は，式 (2.13) を分割する。

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad n_1 < \infty \quad (2.16)$$

第 1 項は有限であり $z = \infty$ を除く領域で収束できる。第 2 項は $|z| > |z_1|$ に対して収束する。以上より，収束領域はある半径の円の外側である。先に述べた，例題では半径 $|a|$ の円の外側が収束領域となっている。

数列としては，左側数列や両側数列も考えられるが，実用的には右側数列が多く用いられるのでここでは省略する。

2.2 z 変換とフーリエ変換及び物理的実現性

z 変換とフーリエ変換の関係及び物理的実現性について少し述べておく。

2.2.1 z 変換とフーリエ変換

1. 信号 $x(n)$ の z 変換 $X(z)$ は z を収束領域に設定することにより可能である。
2. 信号 $x(n)$ のフーリエ変換は $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ であるときに可能である。
3. $x(n)$ のフーリエ変換は z 変換 $X(z)$ において $z = e^{j\omega T}$ とすることに対応する。但し，「 $x(n)$ が上記の条件，すなわち，フーリエ変換が収束するための条件を満たす必要がある」。逆に言えば， $x(n)$ がこの条件を満たさないときは，z 変換は可能であるが，フーリエ変換はできない。
4. フーリエ変換は $e^{j\omega T}$ ，すなわち単位円上の変換であるから，フーリエ変換が可能である条件は「z 変換の収束領域が単位円を含むこと」に相当する。

2.2.2 z 変換と物理的実現性

- 〔1〕 安定な線形シフト不変システムの極の分布

既に述べたように、線形シフト不変システムで因果性が成り立つときのインパルス応答 $h(n)$ は右側数列である。また、右側数列に対する z 変換の収束領域は極の絶対値を半径とする円の外側である。さらに、システムが安定である条件

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (2.17)$$

は $h(n)$ がフーリエ変換可能であることに相当する。フーリエ変換は単位円上で行われるから、 $h(n)$ の z 変換の収束領域が単位円を含むことになる。その結果、極が単位円の内側に分布することになる。

2.1.3 の (例題) において、 $S < \infty$ となるための条件は $|a| < 1$ であり、 z 変換の収束領域は $|z| > |a|$ であるから、収束領域が単位円を含んでいる。さらに、 $X(z)$ の極が a であり、これが単位円の内側に分布している。この様子を図 2.4 に示す。

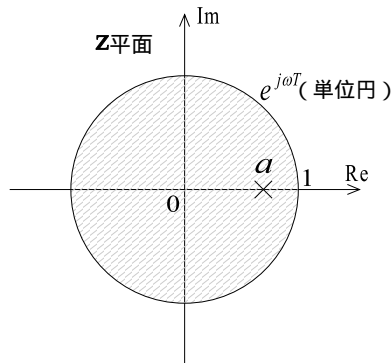


図 2.4 安定な線形シフト不変システムの極の分布領域

〔2〕 z 変換とシステムの実現性

インパルス応答 $h(n)$ が z 変換できてもそのシステムが安定に動作しない場合がある。上で述べたように、 z 変換の収束領域が単位円を含まない場合、すなわち、 z 変換の極が単位円内にはない場合はシステムは不安定となる。この場合

は、 $h(n)$ のフーリエ変換ができないため、システムの周波数特性も定義できない。

(例題)

インパルス応答を $h(n) = a^n, n \geq 0$ とする。 $|az^{-1}| < 1$ とすれば、 $h(n)$ の z 変換は求まり、回路も安定・不安定に関係なく図 2.5 のように実現できる。しかし、 $|a| > 1$ のとき回路は安定に動作せず、周波数特性も求まらない。

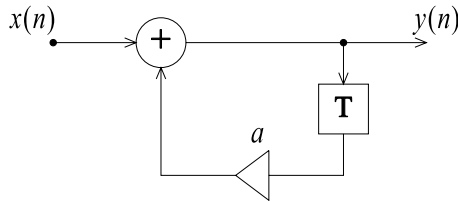


図 2.5 z 変換を実現する回路

2.2.3 z 変換の位置づけ

1. インパルス応答から伝達関数を求める。
2. 回路方程式から伝達関数を求める。
3. システムの安定性を評価する。
 - ・ z 変換の収束領域が単位円を含んでいるか。
 - ・ z 変換の極が単位円の内側に分布するか。
 これらは等価です。

4. 零点や極を求める。

これらについては、本章の最後でもう一度まとめることにする。

2.3 z 変換の性質

ここでは、 $x(n)$ の z 変換を $Z[x(n)]$ と表す。

2.3.1 右側数列の収束領域

右側数列が複数の極を有する場合，収束領域は全ての極 z_p の外側であるから，全体として $|z| > \max\{|z_p|\}$ となる。この様子を図 2.6 に示す。

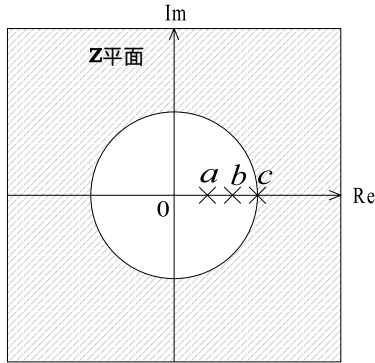


図 2.6 右側数列の収束領域と極の関係

2.3.2 線形性と数列のシフト

収束領域は右側数列で考える。

〔1〕 線形性

$$X(z) = Z[x(n)], \quad R_x < |z| \quad (2.18)$$

$$Y(z) = Z[y(n)], \quad R_y < |z| \quad (2.19)$$

のとき， a, b を定数として，

$$\begin{aligned} Z[ax(n) + by(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax(n) + by(n))z^{-n} \\ &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &= aX(z) + bY(z), \quad \max\{R_x, R_y\} < |z| \end{aligned} \quad (2.20)$$

が成り立つ。

〔2〕 数列のシフト

$X(z) = Z[x(n)]$ のとき, $x(n + n_0)$ に対する z 変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} Z[x(n + n_0)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + n_0)z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m-n_0)} = z^{n_0} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

従って,

$$Z[x(n + n_0)] = z^{n_0} X(z) \quad (2.22)$$

となる。 $n_0 > 0$ のとき, $x(n + n_0)$ の z 変換は $z = 0, \infty$ に極を持つ。右側数列の場合は収束領域から $z = \infty$ を除く。

z 変換における線形性と数列のシフトは伝達関数と回路方程式を関係づけるの用いられる。

2.3.3 その他の性質

〔1〕 指数関数の乗算

$$Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), \quad |a|R_x < |z| \quad (2.23)$$

$X(z)$ の極, 零点を

$$z_p = r_p e^{j\omega_p} \quad (2.24)$$

$$z_z = r_z e^{j\omega_z} \quad (2.25)$$

とすると, $X(a^{-1}z)$ の対応する極と零点は次のようになる。

$$a = |a|e^{j\phi} \quad (2.26)$$

$$z_{pa} = |a|r_p e^{j(\omega_p + \phi)} \quad (2.27)$$

$$z_{za} = |a|r_z e^{j\omega_z + \phi} \quad (2.28)$$

〔2〕 $X(z)$ の微分

$x(n)$ の z 変換を z で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{dz^{-n}}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx(n)z^{-n-1} \\ &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n}\end{aligned}\quad (2.29)$$

従って、 $-z dX(z)/dz$ に対する数列は $nx(n)$ である。

〔3〕 複素数列の共役

$x(n)$ を複素数列とし、その複素共役を $x^*(n)$ とする。 $x^*(n)$ を z 変換し、さらに複素共役をとる。

$$\begin{aligned}Z[x^*(n)]^* &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^{-n} \right)^* \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} = X(z^*)\end{aligned}\quad (2.30)$$

従って、

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*)\quad (2.31)$$

2.3.4 畳み込み和

〔1〕 時間領域における畳み込み和

時間領域における畳み込み和の z 変換はフーリ変換の場合と同様に各々の z 変換の積となる。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\quad (2.32)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)\quad (2.33)$$

〔2〕 周波数領域における畳み込み積分

時間領域における積

$$y(n) = h(n)x(n)\quad (2.34)$$

の z 変換を考える。

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(n)z^{-n}\quad (2.35)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)v^{n-1} dv \right] z^{-n} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] v^{-1} X(v) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c H\left(\frac{z}{v}\right) X(v) v^{-1} dv \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(v) X\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \quad (2.38)$$

式 (2.36) において, $x(n)$ を 2.4 節で説明する逆 z 変換で置き換えている。式 (2.38) は $x(n)$ の代わりに $h(n)$ を逆 z 変換することにより求めている。この結果は, 複素平面における畳み込み積分を表している。

もう少し分かりやすくするために,

$$z = re^{j\phi} \quad (2.39)$$

$$v = \rho e^{j\theta} \quad (2.40)$$

として変形する。積分変数を v から θ に変換する。 v 平面の積分閉路 c は θ 軸上では $[-\pi, \pi]$ に置換できる。さらに,

$$\frac{dv}{d\theta} = j\rho e^{j\theta} = jv \quad (2.41)$$

$$\frac{dv}{jv} = d\theta \quad (2.42)$$

より,

$$Y(re^{j\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\rho e^{j\theta}) X\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\phi-\theta)}\right) d\theta \quad (2.43)$$

Y を ϕ の関数, H, X を θ の関数とすれば, 上式が畳み込み積分の形になっていることが分かる。

以上のように, 時間領域と周波数領域は互いに双対な関係にあり, 一方における積が他方における畳み込み和 (積分) になる。

2.3.5 パーセヴァルの関係

式 (2.35)~(2.38) において, $z = 1$ とおき, 複素数列の z 変換の性質を利用す

ると次の関係を得る。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(v)X^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv \quad (2.44)$$

これは時間領域と周波数領域の一つの関係を表している。ここでは、 $h(n)$ 、 $x(n)$ がフーリエ変換できると仮定して、積分閉路を単位円上にとる。

$$v = e^{j\omega T} \quad (2.45)$$

$$\frac{dv}{d\omega T} = je^{j\omega T} = jv \quad (2.46)$$

$$\frac{dv}{jv} = d\omega T \quad (2.47)$$

これより、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega T \quad (2.48)$$

さらに、

$$h(n) = x(n) \quad (2.49)$$

とすると、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega T \quad (2.50)$$

上式は、「数列（信号）の絶対値の二乗和（エネルギー）はフーリエ変換の絶対値の二乗平均に等しい」ことを表している。言い換えると、信号や雑音のエネルギーを周波数領域で評価できることを示している。この関係は、システムにおける信号や雑音の電力変化や雑音等の解析に重要である。

2.4 逆 z 変換

z 変換 $X(z)$ から $x(n)$ を求める過程について述べる。

2.4.1 未定係数法

z 変換 $X(z)$ が z の有理関数で表される場合、 $x(n)$ と次のような関係がある。

$$X(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad b_0 = 1 \quad (2.51)$$

分母を払って次の関係を得る。

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (2.52)$$

この式は収束領域の任意の z に対して成り立つ恒等式であるから，両辺の z^{-n} の係数を比較することにより次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} a_0 &= x(0) \\ a_1 &= b_1 x(0) + x(1) \\ &\vdots \\ 0 &= b_{M-1} x(n - M + 1) + b_{M-2} x(n - M) + \cdots + x(n) \end{aligned} \quad (2.53)$$

この方程式より $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ の順に $x(n)$ を計算できる。この方法では，計算誤差の累積に注意する必要がある。

2.4.2 部分分数展開

z 変換が z の有理関数の場合，次のように部分分数に展開できる。

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}} \\ &= \sum_{i=0}^L \alpha_i z^{-i} + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\beta_j}{1 - p_j z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$L = N - M \geq 0$ とする

p_j $X(z)$ の極で， $\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i} = 0$ の根

さらに，等比級数の和の公式より次の関係を得る。

$$\frac{\beta_j}{1 - p_j z^{-1}} = \beta_j \sum_{n=0}^{\infty} (p_j z^{-1})^n = \beta_j \sum_{n=0}^{\infty} p_j^n z^{-n} \quad (2.55)$$

以上より，逆 z 変換は次のようになる。

$$x(n) = \alpha_n + \sum_{j=1}^{M-1} \beta_j p_j^n, \quad 0 \leq n \leq L \tag{2.56}$$

$$x(n) = \sum_{j=1}^{M-1} \beta_j p_j^n, \quad L < n \tag{2.57}$$

(例題) $N = M = 2$. 伝達関数の係数は実数とする.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{\beta_1^*}{1 - p_1^* z^{-1}} \\ &= \alpha_0 + \beta_1 \sum_{n=0}^{\infty} (p_1 z^{-1})^n + \beta_1^* \sum_{n=0}^{\infty} (p_1^* z^{-1})^n \end{aligned} \tag{2.58}$$

* は複素共役である。これより,

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha_0 + 2\Re[\beta_1] \\ x(n) &= \beta_1 p_1^n + \beta_1^* p_1^{*n} = 2\Re[\beta_1 p_1^n], \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.59}$$

2.4.3 逆 z 変換の一般式

次の z 変換において

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{2.60}$$

両辺に z^{k-1} を掛け、閉路 C に沿って積分する。

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{2\pi j} \oint_C z^{-n+k-1} dz \tag{2.61}$$

右辺に次のコーシーの積分定理を適用する。

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{2.62}$$

この定理は「反時計回りの閉路積分において、閉路内に一位の極を有する場合に、その積分値が 1 であり、それ以外は零である」ことを意味している（付録参照）。この定理を式 (2.61) の右辺に適用すると、 $n = k$ のとき閉路積分が 1 となり、 $n \neq k$ のときは零となる。従って、式 (2.61) の右辺は $x(k)$ となる。以上により、逆 z 変換が次のように求まる。

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz \tag{2.63}$$

閉路 C は反時計回りの閉路で原点を内部に含み、かつ z 変換の収束領域に位置する。この様子を図 2.7 に示す。

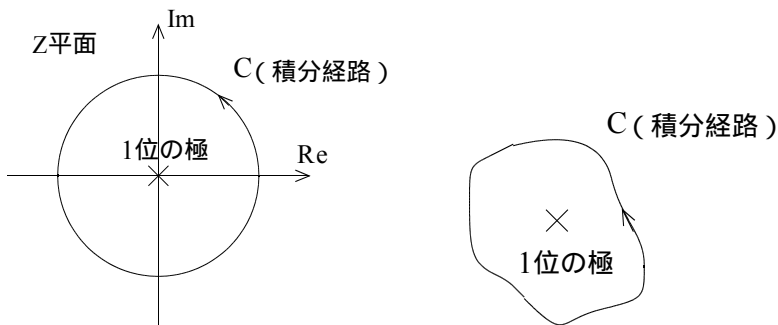


図 2.7 複素積分における閉路積分路

上式の右辺の具体的な計算方法として次の留数定理を用いる。

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) dz \equiv \text{閉路 } C \text{ の内部にある極に関する留数の和} \tag{2.64}$$

次に、 $F(z)$ の留数を計算する式を示す。 $F(z)$ を次のように部分分数に展開する。

$$F(z) = \sum_{k=1}^K \frac{\psi_k(z)}{(z - z_k)^{r_k}} \tag{2.65}$$

$\psi_k(z) = 0$ は z_k を根として含まないとする。 z_k は位数が r_k の極である。このとき、 $F(z)$ の留数は次式で与えられる。

$$\text{Res}[F(z)] = \sum_{k=1}^K \frac{1}{(r_k - 1)!} \left[\frac{d^{r_k-1} \psi_k(z)}{dz^{r_k-1}} \right]_{z=z_k} \tag{2.66}$$

この留数定理を用いて式 (2.63) の逆 z 変換を計算するためには

$$F(z) = X(z)z^{k-1} \tag{2.67}$$

とすればよい。

(例題)

$n \geq 0$ に対する右側数列で考える。

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (2.68)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}} dz \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - a} dz \quad (2.70)$$

$n \geq 0$ に対しては、閉路 C 内部に含まれる極は $z = a$ (1 位の極) のみであるから、

$$F(z) = \frac{z^n}{z - a} \quad (2.71)$$

として、式 (2.66) より

$$x(n) = \frac{1}{(1-1)!} \left[\frac{d^0 z^n}{dz^0} \right]_{z=a} = a^n, \quad n \geq 0 \quad (2.72)$$

2.5 伝達関数

2.5.1 伝達関数の表現

システムの伝達関数 $H(z)$ はインパルス応答 $h(n)$ の z 変換である。さらに、式 (2.33) で示したように畳み込み和の z 変換より、入力信号 $x(n)$ と出力信号 $y(n)$ の z 変換の比 $Y(z)/X(z)$ として表される。

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (2.73)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.74)$$

次に、システムの入力信号と出力信号が次の関係を満たすとき

$$\sum_{j=0}^{M-1} b_j y(n-j) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) \quad (2.75)$$

この両辺を z 変換する。但し、 $x(n)$ と $y(n)$ は共通の収束領域を持つものとし、 z をこの領域に設定する。2.3.2 で述べた z 変換の線形性及び数列のシフトに対する性質により次式を得る。

$$\sum_{j=0}^M b_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} X(z) \tag{2.76}$$

これより，伝達関数が得られる。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{M-1} b_j z^{-j}} \tag{2.77}$$

(例題)

図 2.8 の回路について考える。まず，回路方程式を求める。

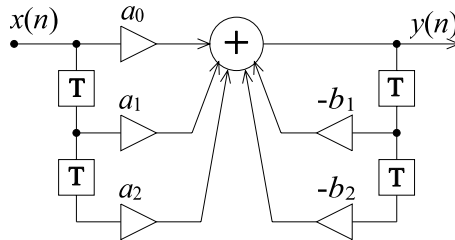


図 2.8 IIR 形回路の例 (1) . 左側が分子，右側が分母に対応する .

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) \tag{2.78}$$

上式を z 変換して，伝達関数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ を求める。

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})X(z) - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})Y(z) \tag{2.79}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{2.80}$$

次に，図 2.8 の回路に対して，遅延器の数減らした回路構成を図 2.9 に示す。遅延器は 2 次の関数 (z^{-1}, z^{-2}) を表現するために，少なくとも 2 個必要である。別の言い方をすれば，2 個まで低減できる。一方，乗算器は a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 が任意の値をとるために，少なくとも 5 個必要である。加算器は，2 入力加算器を基準に考えると，双方の回路とも，4 個必要である。

この回路では，回路方程式を求めるために内部変数 $w(n)$ を使用する。回路方程式は次のようになる。

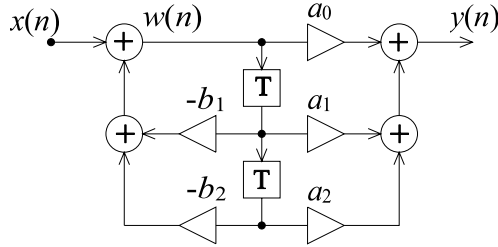


図 2.9 IIR 形回路の例 (2) . 左側が分母 , 右側が分子に対応する .

$$w(n) = x(n) - b_1 w(n-1) - b_2 w(n-2) \quad (2.81)$$

$$y(n) = a_0 w(n) + a_1 w(n-1) + a_2 w(n-2) \quad (2.82)$$

$$(2.83)$$

上式を z 変換し , $W(z)$ を消去することにより , 伝達関数を求める .

$$W(z) = X(z) - b_1 z^{-1} W(z) - b_2 z^{-2} W(z) \quad (2.84)$$

$$Y(z) = a_0 w(z) + a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z) \quad (2.85)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (2.86)$$

以上の 2 つの回路例からも分かるように , 標準的な回路形式では伝達関数の係数が回路の乗数に直接対応する . また , 伝達関数の分子が回路のフィードフォワード , 分母がフィードバックに対応する . さらに , 分母の係数と回路のフィードバックの係数では符号が逆になることに注意されたい .

2.5.2 零点と極

伝達関数の零点と極は , 各々 $H(z) = 0$, $H(z) = \infty$ を満たす z の値である . 因果性を満たすシステムのインパルス応答は $h(n) = 0, n < 0$ であり , $n \geq 0$ における右側数列である . 従って , $z = 0$ に極を有し , $z = \infty$ には極を持たない . さらに , 有限の z において零点及び極を有する . 伝達関数が式 (2.77) に示すように z の有理関数で表されるとき , 分子分母を次のように因数分解することが

できる。

$$H(z) = a \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^M (1 - p_j z^{-1})} \quad (2.87)$$

このとき、 z_i が零点、 p_j が極となる。

2.5.3 伝達関数と周波数特性

システムの周波数特性は第1章で述べたように、線形シフト不変で安定なシステムに対して定義することができ、正弦波入力に対する振幅と位相の変化として現れ、インパルス応答 $h(n)$ のフーリエ変換で求められる。安定条件は、 $h(n)$ の絶対値和が有限であること、あるいは伝達関数の極が単位円の内側に分布することである。これらは等価である。フーリエ変換は安定条件が満たされるとき z 変換で $z = e^{j\omega T}$ と置くことに相当する。言い換えると、 z が単位円上を回転したときの $H(z)$ が周波数特性となる。

零点、極と周波数特性の関係

(例題)

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - bz^{-1}} = \frac{z - a}{z - b} \quad (2.88)$$

について考える。 a が零点で、 b が極である。安定条件は $|b| < 1$ である。 $H(z)$ の振幅特性は次のように表される。

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega T} - a|}{|e^{j\omega T} - b|} \quad (2.89)$$

このように、伝達関数の振幅特性は単位円上の z と零点及び極との距離の比で決まる。振幅特性は z が零点に近いところで小さくなり、極に近いところで大きくなる。この様子を図 2.10 に示す。 $\omega_1 T$ に対しては $1 < |H(e^{j\omega})|$ 、 $\omega_2 T$ に対しては $|H(e^{j\omega})| < 1$ となる。

(例題)

伝達関数の零点 と極 \times が図 2.11(上) のように配置されてるとする。極は大きさが 0.8 で角度が $\pm\pi/4$ である。零点は単位円上にあり、角度が $\pm\pi/2$ と π

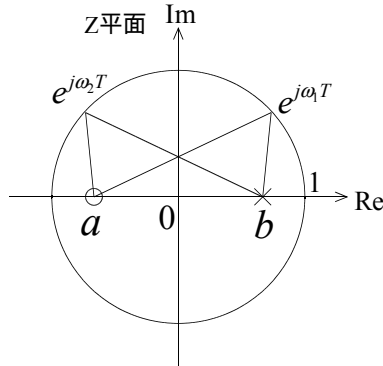


図 2.10 零点・極配置と周波数特性の関係

である。伝達関数は次式で与えられ、周波数特性は $z = e^{j\omega T}$ より計算される。

$$H(z) = \frac{(1 - e^{j\pi} z^{-1})(1 - e^{j\pi/2} z^{-1})(1 - e^{-j\pi/2} z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4} z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4} z^{-1})} \quad (2.90)$$

$$= \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-2})}{1 - 1.6 \cos(\pi/4)z^{-1} + 0.64z^{-2}} \quad (2.91)$$

周波数特性(振幅特性)を図 2.11(下)に示す。振幅特性は極 ($\omega T = \pi/4, 7\pi/4, f = f_s/8, 7f_s/8$) 付近で大きくなり、零点 ($\omega T = \pi/2, \pi, 3\pi/2, f = f_s/4, f_s/2, 3f_s/4$) で零となる。周波数特性は $\omega T = 2\pi (f = f_s)$ を周期とする関数であり、基本区間は $\omega T = 0 \sim \pi (f = 0 \sim f_s/2)$ である。

2.6 伝達関数を中心とした諸概念の関連

伝達関数を中心とした諸概念の関連図を図 2.12 に示す。さらに、具体例を用いて個々の関係を説明する。

〔1〕 インパルス応答 \iff 伝達関数

インパルス応答と伝達関数は z 変換及び逆 z 変換で関係づけられる。インパルス応答として次のような例を考える。

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

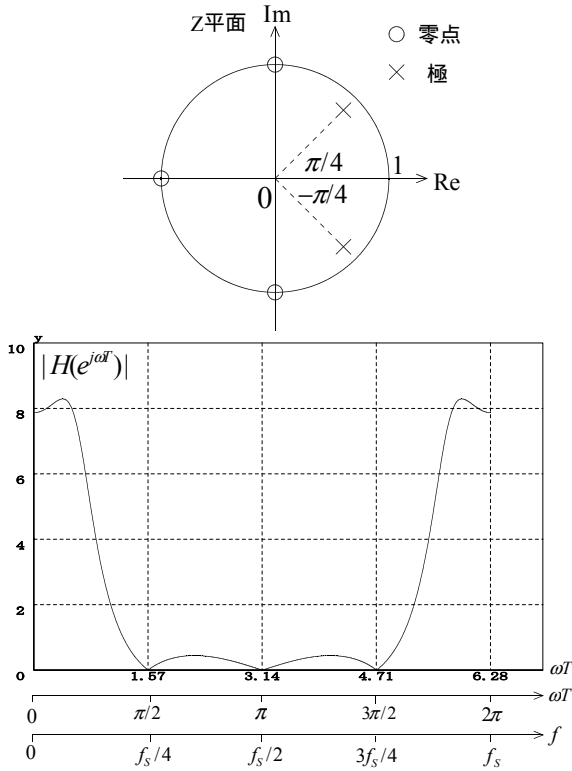


図 2.11 零点・極配置と周波数特性の関係

$$h(0) = a_0 \quad (2.92)$$

$$h(n) = a_0(-b)^n + a_1(-b)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

伝達関数 $H(z)$ は $h(n)$ の z 変換で求められる。

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_0(-b)^n + a_1(-b)^{n-1}]z^{-n} \\ &= a_0 + \frac{-a_0bz^{-1}}{1+bz^{-1}} + \frac{a_1z^{-1}}{1+bz^{-1}}, \quad |bz^{-1}| < 1 \end{aligned}$$

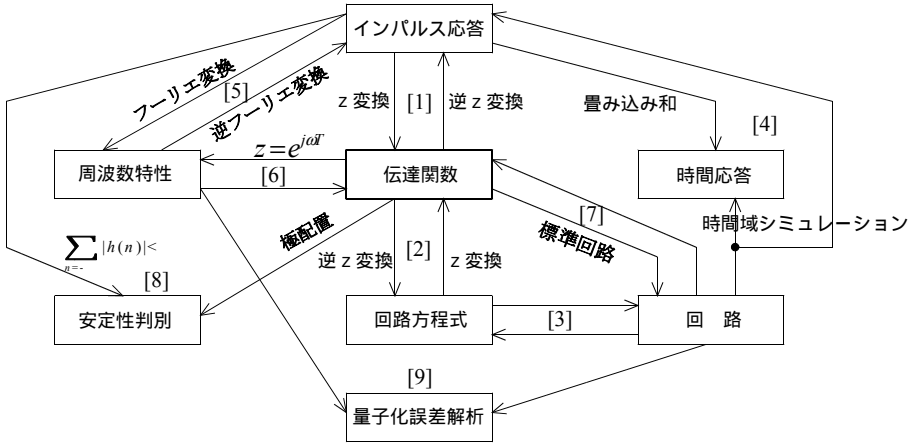


図 2.12 伝達関数を中心とした諸概念の関連図

$$= \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}} \tag{2.93}$$

(別の式表現)

$$\begin{aligned} H(z) &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-b)^n z^{-n} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-b)^n z^{-n} \\ &= \frac{a_0}{1 + b z^{-1}} + \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}} \end{aligned} \tag{2.94}$$

次に、伝達関数からインパルス応答を求める。伝達関数を次のように部分分数に展開する。

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}} + \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \tag{2.95}$$

右辺の第1項と第2項は等比級数の和の公式から次のように展開できる。

$$\frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}} = a_0 [1 + (-b z^{-1}) + (b_1 z^{-1})^2 + \dots] \tag{2.96}$$

$$\frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} = a_1 z^{-1} [1 + (-b z^{-1}) + (b_1 z^{-1})^2 + \dots] \tag{2.97}$$

以上より、伝達関数は次のように z^{-1} のべき級数に展開できる。

$$H(z) = a_0 + (a_0(-b_1) + a_1) z^{-1}$$

$$+ (a_0(-b_1)^2 + a_1(-b_1))z^{-2} + \dots \quad (2.98)$$

$$= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots \quad (2.99)$$

これより，式 (2.92) で与えられるインパルス応答 $h(n)$ が求まる．

〔2〕 伝達関数 \iff 回路方程式

上記の伝達関数 $H(z)$ より

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1}}{1 + bz^{-1}} \quad (2.100)$$

$$(1 + bz^{-1})Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1})X(z) \quad (2.101)$$

逆 z 変換より

$$y(n) + by(n-1) = a_0x(n) + a_1x(n-1) \quad (2.102)$$

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) - by(n-1) \quad (2.103)$$

回路方程式から伝達関数を求める過程はこの逆になる。

〔3〕 回路 \iff 回路方程式

図 2.13(a) の回路において，入力側の加算器出力を $w(n)$ (内部変数) として，回路方程式を求める。

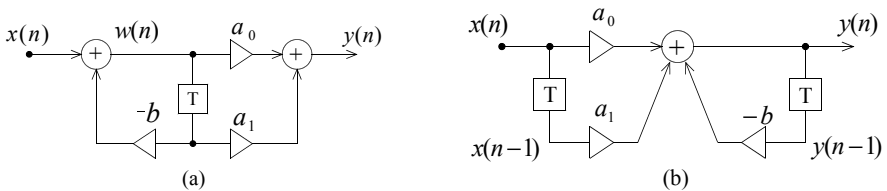


図 2.13 伝達関数を実現する回路の例

回路のシグナルフローに従って入力信号 $x(n)$ ，出力信号 $y(n)$ 及び内部変数 $w(n)$ は次のように関係づけられる。

$$w(n) = x(n) - bw(n-1) \quad (2.104)$$

$$y(n) = a_0w(n) + a_1w(n-1) \quad (2.105)$$

さらに，内部変数を消去して，入出力関係を得る。

$$w(n-1) = \frac{x(n) - w(n)}{b} \quad (2.106)$$

$$y(n) = a_0 w(n) + a_1 \frac{x(n) - w(n)}{b} \quad (2.107)$$

$$w(n) = \frac{y(n) - \frac{a_1}{b} x(n)}{a_0 - \frac{a_1}{b}} \quad (2.108)$$

この $w(n)$ を式 (2.105) に代入し、式 (2.103) と同じ $y(n)$ の式を得る。

$$y(n) = a_0 \frac{y(n) - \frac{a_1}{b} x(n)}{a_0 - \frac{a_1}{b}} + a_1 \frac{y(n-1) - \frac{a_1}{b} x(n-1)}{a_0 - \frac{a_1}{b}} \quad (2.109)$$

$$= a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - by(n-1) \quad (2.110)$$

上記の計算は大変面倒であり、実際には、式 (2.104), (2.105) を z 変換し、 $W(z)$ を消去して、 $X(z)$ と $Y(z)$ の関係を求め、それを逆 z 変換する方法が計算が簡単である。

回路の時間領域のシミュレーションは式 (2.104), (2.105) のままで計算できる。また、回路の中を流れる信号を用いてシミュレーションを行うことにより量子化誤差 (丸め, オーバーフロー) の解析を行うことができる。

図 2.13(b) の回路では、入力信号 $x(n)$ と出力信号 $y(n)$ の関係が直接的に求められ、次のようになる。

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - by(n-1) \quad (2.111)$$

回路 → 回路方程式 → 伝達関数

回路方程式 (2.104), (2.105) から $w(n)$, $w(n-1)$ を消去する過程は面倒であるので、このまま z 変換し、 $W(z)$ を消去して、 $Y(z)/X(z)$ を求める方が計算が簡単である。

$$W(z) = X(z) - bz^{-1}W(z) \quad (2.112)$$

$$Y(z) = a_0 W(z) + a_1 z^{-1}W(z) \quad (2.113)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + bz^{-1}} \quad (2.114)$$

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1})W(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + bz^{-1}} X(z) \quad (2.115)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}} \quad (2.116)$$

回路から式(2.110)を求めるのも、 $w(n)$ 、 $w(n-1)$ を消去するのではなく、 z 変換して $W(z)$ を消去し、逆 z 変換の方が簡単である。

〔4〕 インパルス応答、回路 → 時間応答

インパルス応答 $h(n)$ または回路が与えられたとき、任意の入力信号に対する出力信号を計算する。インパルス応答が与えられているときは畳み込み和を用いる。

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) \quad (2.117)$$

回路が与えられているときは、式(2.104)、(2.105)に示すように、内部変数を含めた回路方程式を求め、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に従って順次計算する。このとき、まず、入力信号 $x(n)$ と過去の内部信号 $w(n-1)$ のみで表される信号 $w(n)$ が計算される。次に、この信号を加えたもので表現できる信号を計算する。以下、この計算を繰り返し、最終的に出力信号 $y(n)$ を計算する。このように順を追って計算する方程式を順序方程式と呼ぶ。

〔5〕 インパルス応答 \longleftrightarrow 周波数特性

フーリエ変換及び逆フーリエ変換の関係にある。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega nT} \quad (2.118)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega nT} d\omega T \quad (2.119)$$

〔6〕 伝達関数 \longleftrightarrow 周波数特性

周波数特性はシステムが安定であるときに定義と、そのとき伝達関数で $z = e^{j\omega T}$ とすることにより求まる。実現したい周波数特性を与えて伝達関数を近似する過程はフィルタ設計で用いられる。これは5章、6章で述べる。

〔7〕 伝達関数 \longleftrightarrow 回路

式(2.93)で表される伝達関数を図2.13に示す回路で実現すると、伝達関数の係数と回路の乗算器の乗数が等しくなる。但し、分母の係数と回路の乗数は符

号が逆になる。このように、標準的な回路形式では伝達関数と回路が直接対応する。一般的に、伝達関数の分子が回路のフィードフォワード、分母がフィードバックに対応する。

〔8〕 インパルス応答，伝達関数 → 安定性判別

インパルス応答 $h(n)$ が与えられているときは、その絶対値和が有限であるかどうかで評価する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (2.120)$$

伝達関数が与えられている場合は極 z_p を求め、それが単位円の内側に分布するどうか評価する。

$|z_p| < 1$ 安定

$|z_p| = 1$ 発振

$|z_p| > 1$ 発散

〔9〕 量子化誤差の解析

デジタルシステムでは乗数と信号が量子化され、前者は周波数特性の変動、後者は丸め誤差による加算的な出力雑音とオーバーフローによる歪みとして現れる。時間領域では回路方程式を順次解く形式でシミュレーションできる。また、丸め誤差の影響は周波数領域でも解析できる。詳しくは、第8章で述べる。

演習問題

1. 以下の文章は回路（伝達関数）が安定であることを表している。空欄に適切な語句を入れよ。
 - (a) インパルス応答の（ア）が有限である。
 - (b) 伝達関数の極が（イ）の内側にある。
 - (c) インパルス応答の（ウ）が可能である。
 - (d) インパルス応答の z 変換の収束領域が（エ）を含む。

- (e) 入力信号が有限であるとき，出力信号も（オ）である。
- (f) 伝達関数において $z = (\text{カ})$ とすることにより，周波数特性を計算できる。

2. 線形・シフト不変で因果性を満たすシステムのインパルス応答を $h(n)$ とし，これに対する z 変換を $H(z)$ とする． $h(n)$ が次式で与えられるとき，以下の間に答えよ．

$$h(n) = \begin{cases} 2r^n \cos(\omega_0 n T), & 0 \leq n \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (2.121)$$

- (a) $h(n)$ の z 変換 $H(z)$ を求め， z^{-1} の有理関数として表せ．
- (b) システムが安定であるための条件を求めよ．
- (c) $H(z)$ を伝達関数とする回路の例を求めよ．
- (d) $r = 0.9$ ， $\omega_0 T = \pi/2$ としたとき， $H(z)$ の周波数特性（振幅特性，位相特性）を求めて図示せよ．但し， $\omega T = 0, \pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi$ について計算し，概略図を示せ．
- (e) このシステムに次式で与えられる信号 $x(n)$ を入力したときの出力信号 $y(n)$ を求めよ．

$$x(n) = a e^{j(\omega n T + \phi)}, \quad a = 0.7, \omega T = \pi/4, \phi = 0.3[\text{rad}] \quad (2.122)$$

3. 次の伝達関数に関して以下の間に答えよ。

$$H(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} \quad (2.123)$$

- (a) $H(z)$ のインパルス応答 $h(n)$ を求めよ。
- (b) 上記で求めたインパルス応答 $h(n)$ を z 変換することにより，伝達関数 $H(z)$ を求めよ。
- (c) 伝達関数 $H(z)$ の極，及びインパルス応答 $h(n)$ に基づいて $H(z)$ の安定性を評価せよ。

- (d) インパルス応答 $h(n)$ を用いて周波数特性 ($e^{j\omega T}$ の関数) を求めよ。
- (e) 伝達関数 $H(z)$ から周波数特性 ($e^{j\omega T}$ の関数) を求めよ。
- (f) 伝達関数 $H(z)$ から回路方程式 (入力信号 $x(n)$ と出力信号 $y(n)$ の関係) を求めよ。
- (g) $H(z)$ を実現する回路の一例を求めよ。
- (h) 上記の回路における回路方程式 (内部変数 $w(n)$ を用いる) を求めよ。
- (i) 上記の回路方程式を用いて, 次の入力信号 $x(n)$ に対する出力信号 $y(n)$ を求めよ。

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & n \neq 0, 1, 2 \end{cases} \quad (2.124)$$

- (j) インパルス応答 $h(n)$ を用いて, 上記の入力信号 $x(n)$ に対する出力信号 $y(n)$ を求めよ。
4. 図 2.14 の回路に関して以下の問に答えよ .
- (a) $y(n)$ を $x(n)$ と $w(n)$ を用いて表せ .
 - (b) 上の関係を z 変換することにより, 伝達関数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ を求めよ .
 - (c) 伝達関数 $H(z)$ から極を求めて, この回路が安定であるための条件を求めよ .
 - (d) 伝達関数 $H(z)$ からインパルス応答 $h(n)$ を求めよ .
 - (e) 図 2.15 の入力信号 $x(n)$ を $x(n) = a \cos(\omega nT + \phi)$ と表したとき, a , ωT , ϕ を求めよ .
 - (f) $x(n)$ に対する出力信号 $y(n)$ (定常応答) を求めよ (式で表す) . 但し, $b = 0.5$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ とする . 位相に関しては, $y(n)$ を表す式で θ を用い, 「但し, $\tan \theta = \text{数値}$ 」という表現でもよい .

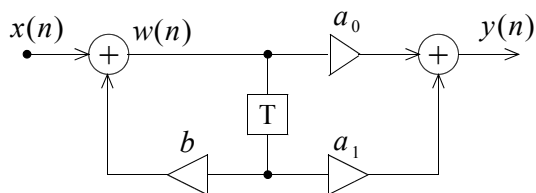


図 2.14 1次 IIR フィルタ

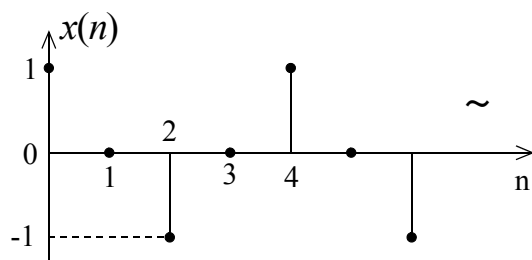


図 2.15 入力信号 $x(n)$.

附録：コーシーの積分定理

次の閉路積分において，

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz \quad (2.125)$$

被積分関数が正則である領域であれば，この閉路積分は閉路 C の取り方によらない。そこで， C を $e^{j\theta}$ とする。すなわち，

$$z = e^{j\theta} \quad (2.126)$$

とする。これより，

$$\frac{dz}{d\theta} = je^{j\theta} \quad (2.127)$$

$$dz = je^{j\theta} d\theta \quad (2.128)$$

となる。積分路は閉路 C から θ 軸上の $0 \sim 2\pi$ になる。これらを式 (2.125) に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} e^{j\theta(k-1)} je^{j\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\theta k} d\theta \\ &= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.129)$$

一般に

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{(z - z_p)^k} dz \quad (2.130)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c (z - z_p)^{k-1} dz \quad (2.131)$$

についても，積分閉路 C の中心を z_p に移せば同様な結果となる。