

3

離散フーリエ変換

標本化された信号のフーリエ変換については第1章で述べた。本章では、さらに周波数領域における標本化を考え、時間領域と周波数領域の双方で標本化された信号のフーリエ変換 (Discrete Fourier Transform: DFT) とその性質、畳み込み和、及びフィルタリング等について述べる。デジタル計算機における信号の数値表現が必然的に離散時間系になることから、必然的に DFT の形式となるが、さらに、フーリエ変換の高速算法や信号処理のブロック化、高速処理等にも関連する基本技術である。

3.1 離散フーリエ変換の導出

3.1.1 フーリエ変換の標本化

$x(n)$ のフーリエ変換を $X(e^{j\omega})$ とする。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega nT} \quad (3.1)$$

$X(e^{j\omega})$ を単位円上等間隔な N 点で標本化して得られる標本値を $\tilde{X}(k)$ とする。 $\omega T (f)$ 軸上では $0 \sim 2\pi (0 \sim f_s)$ に並ぶ N 点の等間隔な標本点になる。

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j2\pi k/N}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.2)$$

$\tilde{X}(k)$ を標本値とする連続関数は δ 関数を用いて次のように表される。

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k)\delta(\omega T - \frac{2\pi k}{N}) \quad (3.3)$$

$\tilde{X}(e^{j\omega})$ が $X(e^{j\omega})$ を標本化したものであり、これに対する時間領域の信号を $\tilde{x}(n)$ として逆フーリエ変換により求める。

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n T} d\omega T \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega T - \frac{2\pi k}{N}) \right] e^{j\omega n T} d\omega T \quad (3.5)$$

上式で、 ωT の積分区間は $0 \sim 2\pi$ であるから、 k も $k = 0 \sim N - 1$ の範囲で考えればよい。これにより、上式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \delta(\omega T - \frac{2\pi k}{N}) \right] e^{j\omega n T} d\omega T \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \int_0^{2\pi} \delta(\omega T - \frac{2\pi k}{N}) e^{j\omega n T} d\omega T \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi n k}{N}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

連続系の1周期が 2π であるのに対して、離散系の1周期は N であるから、 $1/2\pi$ を $1/N$ で置き換える。

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi n k}{N}} \quad (3.7)$$

このように、 $\tilde{X}(e^{j\omega})$ の逆フーリエ変換である $\tilde{x}(n)$ はフーリエ変換の1周期分の標本値 $\tilde{X}(k)$, $k = 0 \sim N - 1$ を用いて計算される。

次に、 $\tilde{x}(n)$ から $\tilde{X}(k)$ を求めるフーリエ変換は次式で与えられる。

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j 2\pi n k / N} \quad (3.8)$$

これを式(3.7)の $\tilde{X}(k)$ に代入することにより、 $\tilde{x}(n)$ が求まることを以下に示す。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi n k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) e^{-j 2\pi m k / N} \right] e^{j \frac{2\pi n k}{N}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-m)k/N} \right] \\
 &= \tilde{x}(n)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

上式で $[\]$ の中は $m = n$ のとき 1 となり、 $m \neq n$ のとき 0 となる。従って、 $m = n$ に対する項のみが残り、 $\tilde{x}(n)$ となる。

3.1.2 離散フーリエ変換のまとめ

以上の離散フーリエ変換を以下にまとめる。

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{3.10}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{3.11}$$

このように、離散フーリエ変換では、時間領域、周波数領域とも 1 周期分の標本値を用いて変換される。

3.1.3 フーリエ変換の標本化による時間信号の変化

$X(e^{j\omega})$ に対する時間信号 $x(n)$ と式 (3.11) で示される $\tilde{X}(k)$ に対する時間信号 $\tilde{x}(n)$ の関係を調べる。式 (3.11) の $\tilde{X}(k)$ に式 (3.2) を代入する。

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi km/N} \right] e^{j2\pi kn/N} \tag{3.12}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k(m-n)/N} \tag{3.13}$$

ここで、

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k(m-n)/N} = \begin{cases} 1, & m-n = rN, \quad r \text{ は整数} \\ 0, & m-n \neq rN \end{cases} \tag{3.14}$$

であるから、

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \tag{3.15}$$

を得る。これから分かるように、周波数領域における標本化により、時間波形 $\tilde{x}(n)$ は元の波形 $x(n)$ を N サンプルの整数倍だけシフトして加算したものである。従って、 $\tilde{x}(n)$ は N サンプルを周期とする周期関数となる。周期を時間で表すと $T_L = NT$ 秒である。さらに、周波数領域の標本間隔を Δf Hz とすると、 $N = f_s/\Delta f$ であるから

$$T_L = NT = \frac{N}{f_s} = \frac{1}{\Delta f} \tag{3.16}$$

と表される。すなわち、 $\tilde{x}(n)$ の周期 (秒) を Δf で表すと $1/\Delta f$ 秒である。

$x(n)$ と $\tilde{x}(n)$ の関係を図 3.1 に示す。 $x(n)$ が $0 \sim T_0 (= MT)$ 秒、すなわち $0 \sim M$ サンプルの範囲に分布しているとする。実線が $M < N$ の場合である。点線が $M > N$ の場合であり、 $x(n + rN)$ の間に重なりが生じている。

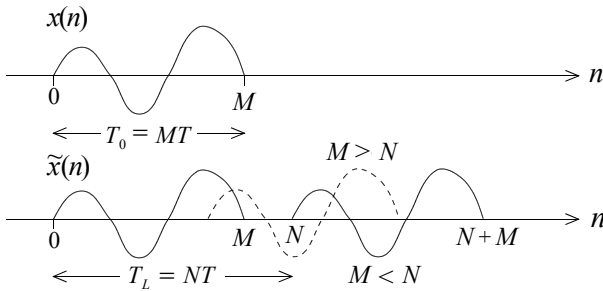


図 3.1 周波数領域の標本化による時間信号の変化

周波数領域の標本化により、時間信号が元の時間信号のシフト&加算で与えられることは、第 1 章で述べたように、時間領域における標本化により、周波数特性が元の周波数特性のシフト&加算で与えられたことと同じである。これも、時間領域と周波数領域の双対な関係の一つである。時間領域と周波数領域における標本間隔と周期の関係を表 3.1 に示す。

3.1.4 周波数領域における標本化定理

周波数領域の標本化により、時間領域の信号が情報を失わないためには式

表 3.1 離散フーリエ変換 (DFT) における時間領域と周波数領域の標本間隔と周期の関係

| 時間領域 | 周波数領域 |
|---------------------|-----------------------|
| 標本間隔 = T 秒 | 周期 = $1/T (= f_s)$ Hz |
| 周期 = $1/\Delta f$ 秒 | 標本間隔 = Δf Hz |

(3.15) において, $x(n+rN)$ が重ならないことである。図 3.1 に示すように, 周波数領域の標本点数を N とし, $\tilde{x}(n)$ の周期を $T_L = NT$, $x(n)$ の分布範囲を $0 \leq n \leq M$ ($0 \sim T_0 = MT$) であるとする, と

$$T_0 = MT < T_L = NT \quad (3.17)$$

が重なりが生じない条件である。この条件は $T_L = 1/\Delta f$ であるから,

$$\Delta f < \frac{1}{T_0} \quad (3.18)$$

と表される。さらに, サンプル数で表すと

$$M < N \quad (3.19)$$

となる。

3.1.5 標本化周波数, 標本間隔, 標本点数の決め方

連続時間信号 $x(t)$ が $0 \leq t \leq T_0$ に分布し, そのフーリエ変換 $X(j\omega)$ は $|f| \leq f_c$ に分布しているとする。標本化周波数 f_s は

$$f_s > 2f_c \quad (3.20)$$

を満たすように選ぶ必要がある。時間領域の標本間隔は $T = 1/f_s$ であるから, T に対する条件は

$$T = \frac{1}{f_s} < \frac{1}{2f_c} \quad (3.21)$$

となる。時間領域では, $0 \leq t \leq T_0$ に分布する信号 $x(t)$ の両端を標本値として

含むとし ($x(0) \neq 0, x(T_0) \neq 0$) , 標本点数を $M + 1$ とすると $T_0 = MT$ であるから, M に対する条件は

$$M = \frac{T_0}{T} > 2T_0f_c \tag{3.22}$$

となる。

一方, 周波数領域における標本間隔 Δf は前節より

$$\Delta f < \frac{1}{T_0} \tag{3.23}$$

を満たす必要がある。また, 周波数領域の1周期分の標本点数 N に対する条件も前節より

$$N > M \tag{3.24}$$

となる。

式 (3.21) , (3.23) から分かるように, 時間領域, 周波数領域とも標本間隔の上限は相手領域における成分の分布範囲の逆数で決まる。この関係を表 3.2 に示す。これも双対な関係の一つである。

表 3.2 離散フーリエ変換 (DFT) における時間領域と周波数領域の成分の分布範囲と標本間隔の上限の関係

| 時間領域 | 周波数領域 |
|------------------------|-------------------------------|
| 標本間隔の上限 $T < 1/2f_c$ 秒 | 分布範囲 = $2f_c$ Hz |
| 分布範囲 = T_0 秒 | 標本間隔の上限 $\Delta f < 1/T_0$ Hz |

(例題)

$T_0 = 0.1$ 秒, $f_c = 3kHz$ のとき, $f_s > 2f_c = 6kHz$, $T < 1/2f_c = 0.166msec$, $\Delta f < 1/T_0 = 10Hz$, $M > 2T_0f_c = 600$, $N > M$ となる。

3.1.6 連続時間信号のフーリエ変換から離散フーリエ変換までの関係
 連続時間信号とそのフーリエ変換，離散時間信号とそのフーリエ変換，及び
 周波数領域における標本化までの関係を図 3.2 に示す。

(a) $x(t) \iff X(j\omega)$: 連続時間信号とフーリエ変換
 Fourier Transform: FT

(b) $x(n) \iff X(e^{j\omega})$: 標本化された信号とフーリエ変換
 Fourier Transform: FT

(c) $\tilde{x}(t) \iff \tilde{X}(k)$: 周期的な連続時間信号とフーリエ級数展開
 Fourier Series: FS

(d) $\tilde{x}(n) \iff \tilde{X}(k)$: 時間領域と周波数領域の双方で標本化 & 周期関数
 周期的な連続時間信号の標本化に相当
 Discrete Fourier Series: DFS

(e) $x(n) \iff X(k)$: (d) の基本区間のみに着目
 Discrete Fourier Transform: DFT

離散フーリエ変換は時間領域及び周波数領域の双方において，標本化されて
 おり，かつ周期関数である。周期関数であるが，特に 1 周期のみに着目して議
 論する。しかし，その本質は周期関数であるということに留意すること。有限
 長の信号に対して成り立つ関係ではない。

離散フーリエ変換は周期的な連続時間信号を標本化することによっても導か
 れる。その導出過程はフーリエ変換の標本化に類似しているのでここでは省略
 する。

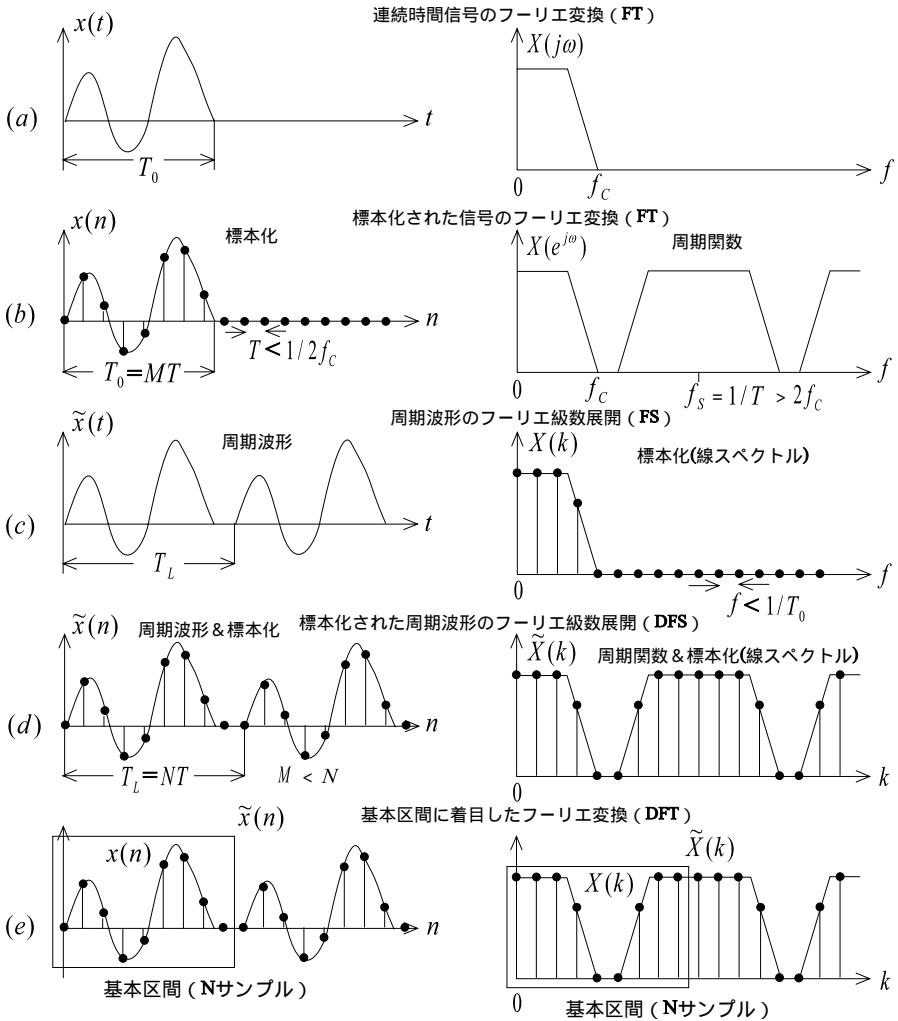


図 3.2 時間領域と周波数領域における標本化とフーリエ変換及びフーリエ級数展開

3.2 離散フーリエ変換の性質

周期性を表すのに $\tilde{x}(n)$, $\tilde{X}(k)$ と表したが*, 基本区間 $0 \leq n \leq N-1$, $0 \leq k \leq N-1$ のみに着目して, 単に $x(n)$, $X(k)$ と表すことにする。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.25)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.26)$$

3.2.1 線形性と循環シフト

〔1〕 線形性

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \quad (3.27)$$

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3.28)$$

〔2〕 循環シフト

信号のシフトは $x(n)$ が周期信号であること, 及び時間サンプルは $0 \leq n \leq N-1$ の範囲で考えることを考慮して N を法とする剰余演算で表現する。

$$y(n) = x((n-k)_N), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.29)$$

とする。 $((n)_N)$ は N を法とする剰余演算である。

(例題)

$N=5, k=3$ として, $y(n) = x((n-3)_5)$ を求める。

$$y(0) = x((0-3)_5) = x(2)$$

$$y(1) = x((1-3)_5) = x(3)$$

$$y(2) = x((2-3)_5) = x(4)$$

$$y(3) = x((3-3)_5) = x(0)$$

$$y(4) = x((4-3)_5) = x(1)$$

この様子を図 3.3 に示す。

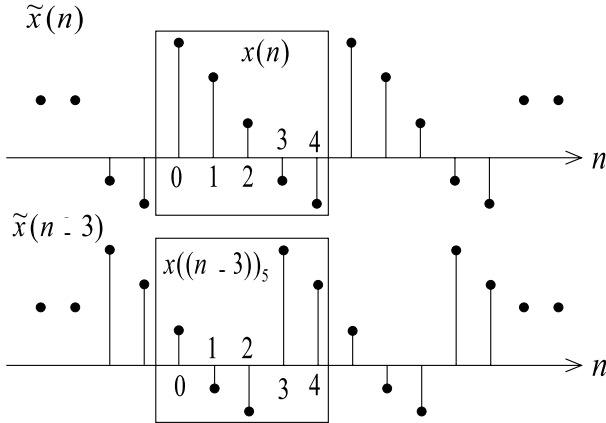


図 3.3 離散フーリエ変換に対応する時間信号のシフト： $y(n) = x((n-3))_5$.

〔3〕 循環形の時間及び周波数軸

離散フーリエ変換では、時間軸と周波数軸は N を方とする剰余演算となっているが、これは座標軸を図 3.4 に示すように循環形にすることに相当する。

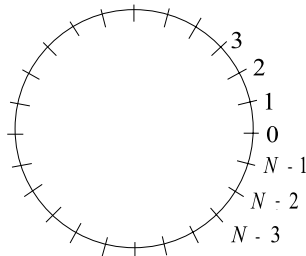


図 3.4 離散フーリエ変換を表現する循環形の時間軸及び周波数軸

〔4〕 シフトされた信号に対する離散フーリエ変換

$x(n)$ に対する DFT を $X(k)$ とするとき、 $x(n-m)$ に対する DFT は定義より $e^{-j2\pi km/N} X(k)$ となる。逆に、 $X(k+l)$ に対する逆 DFT は $e^{-j2\pi ln/N} x(n)$ となる。

3.2.2 循環畳み込み和

時間領域と周波数領域において，一方が積であれば，片方が畳み込み和であるという関係は DFT においても成り立つ。しかし，周期関数であるから時間軸と周波数軸は循環的になる。

$$y_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.30)$$

$$Y_3(k) = X_1(k)X_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.31)$$

$$y_3(n) = x_1(n)x_2(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.32)$$

$$Y_3(k) = \sum_{l=0}^{N-1} X_1((l))_N X_2((k-l))_N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.33)$$

これらの性質の他に，表 1.2 に示すフーリエ変換と同様な性質が成り立つ。導出過程は第 1 章のフーリエ変換の場合と同じである。

(例題)

$N = 4$ の場合，循環畳み込み和は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(3) & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & x_2(3) \\ x_2(3) & x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.3 離散フーリエ変換による線形畳み込み和

3.3.1 線形畳み込み和

線形畳み込み和は次式で表される。

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (3.35)$$

例えば，図 3.5 のような回路で実現できる。行列の形で書くと次のようになる。

$N = 3$ とする。

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h(2) & h(1) & h(0) & 0 \\ 0 & 0 & h(2) & h(1) & h(0) \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

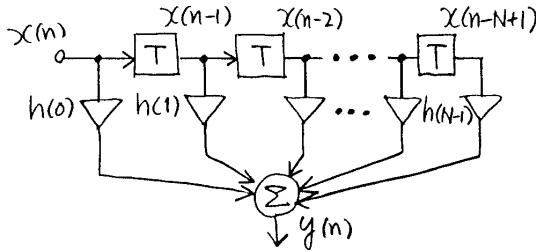


図 3.5 線形畳み込み和の実現例：FIR フィルタ。

この線形畳み込み和を DFT を用いて計算する場合がある。その目的は

- ・ DFT の高速アルゴリズムを用いて計算量を低減できる。
- ・ 時間領域よりも周波数領域で処理の方が効率が良い場合がある。

DFT を用いる畳み込み処理を図 3.6 に示す。ここでは、DFT は N サンプルを同時に処理するが、これをブロック処理と呼ぶ。

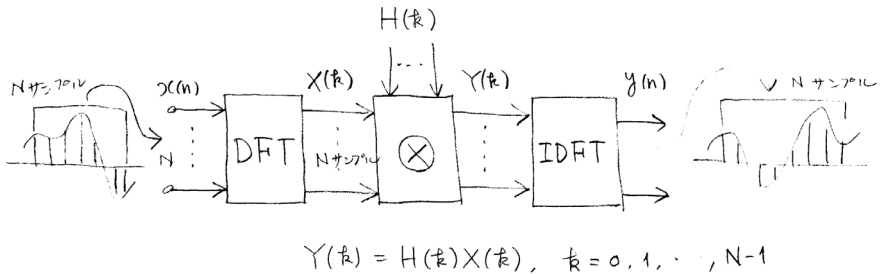


図 3.6 DFT による線形な畳み込み処理 - ブロック処理 -

しかし、DFT による畳み込みは循環畳み込みであるため線形畳み込みと対応させるために注意が必要である。時間領域で言うと、式 (3.36) の計算を式 (3.34) で等価的に行うことに相当する。

3.3.2 有限長信号の場合

入力信号 $x(n)$ が $0 \leq n \leq N-1$ 、 $h(n)$ が $0 \leq n \leq M-1$ に分布するとする。線形畳み込みにより $y(n)$ は $0 \leq n \leq N+M-2$ に分布する。従って、 $N+M-1$ 点 DFT が必要である。そのため、次のように零のサンプルを挿入する。

$$x(n) = 0, N \leq n \leq N+M-2 \quad (3.37)$$

$$h(n) = 0, M \leq n \leq N+M-2 \quad (3.38)$$

この様子を図 3.7 に示す。DFT による畳み込みは次のようになる。

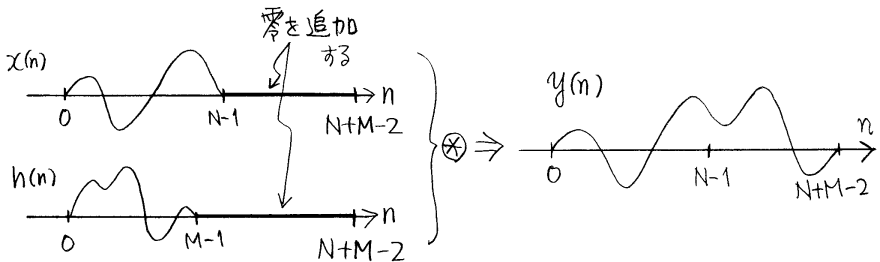


図 3.7 数列の拡張により、DFT で線形畳み込みを実現する方法

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N+M-2} x(n)e^{-j2\pi kn / (N+M-1)}, 0 \leq k \leq N+M-2 \quad (3.39)$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N+M-2} h(n)e^{-j2\pi kn / (N+M-1)}, 0 \leq k \leq N+M-2 \quad (3.40)$$

$$Y(k) = H(k)X(k), 0 \leq k \leq N+M-2 \quad (3.41)$$

$$y(n) = \frac{1}{N+M-1} \sum_{k=0}^{N+M-2} Y(k)e^{j2\pi kn / (N+M-1)}, 0 \leq n \leq N+M-2 \quad (3.42)$$

$N + M - 1$ サンプルが一括して処理される。

3.3.3 無限長数列の場合

一般に入力信号は無限長の場合が多い。この場合は、有限区間を切り出して DFT を行う。この区分化により誤差を生じないために 2 つの方法がある。ここでも、 $h(n)$ のサンプル数を M とする。

〔1〕 重畳加算法 : Overlap-add method

入力信号 $x(n)$ から N サンプルを切り出し、 $M - 1$ サンプルの零を加えて、 $N + M - 1$ サンプルとする。 k 番目のブロックにおける入力信号を $x_k(n)$ 、出力信号を $y_k(n)$ とする。 $x_k(n)$ 、 $h(n)$ から $y_k(n)$ を求める過程は上の式と同じである。

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n), & kN \leq n \leq (k+1)N - 1 \\ 0, & (k+1)N \leq n \leq (k+1)N + M - 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n-m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M-1} h(m) x_k(n-m) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \end{aligned} \quad (3.45)$$

出力信号において、 $y_k(n)$ と $y_{k+1}(n)$ が $(k+1)N \leq n \leq (k+1)N + M - 1$ で重なるので、この部分は加算する。この様子を図 3.8 に示す。斜線部分がオーバーラップしているので加算して出力する。

〔2〕 重畳保存法 : Overlap-save method

入力信号 $x(n)$ から $N + M - 1$ サンプルを切り出す方法である。さらに、 $M - 1$ サンプルの零を加えて $N + 2(M - 1)$ サンプルとして DFT を行う。

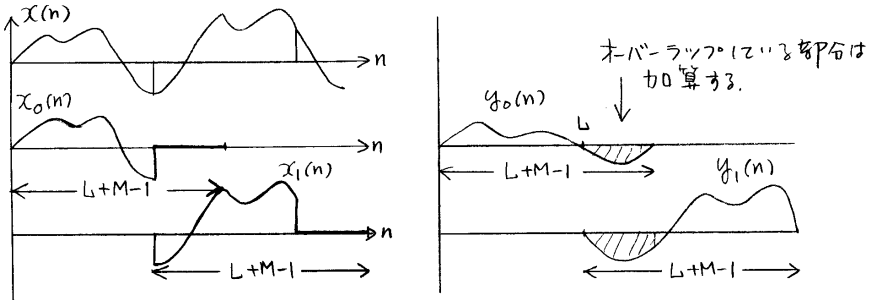


図 3.8 無限長時間信号に対する DFT による畳み込み和 - 重畳加算形 -

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n), & kN \leq n \leq (k+1)N + M - 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (3.46)$$

であるから,

$$y_k(kN + l) = \sum_{m=0}^{M-1} x_k(kN + l - m)h(m), \quad 0 \leq l \leq N + 2(M-1) \quad (3.47)$$

で計算される出力信号 $y_k(kN + l)$ では, $0 \leq l \leq M - 1, N + M \leq n \leq N + 2(M - 1)$ に対して入力信号が不足することになり, 不正解となるので使用しない。 $y_k(n), kN + M \leq n \leq (k + 1)N + M - 1$ が使用される。この様子を図 3.9 に示す。重畳加算法に比べて, DFT のサンプル数は $N + M - 1$ から $N + 2(M - 1)$ に増加するが, 隣接ブロック間で加算は必要ない。

3.4 演習問題

1. 次の文章は連続時間信号 $x(t)$, 及び, その標本化された信号 $x(n)$ のフーリエ変換, 及び, 離散フーリエ変換に関するものである。空欄に入る適切な式や語句を下欄より選択して番号で答えよ。

「 $x(t)$ を T 秒間隔で標本化して $x(n)$ を得るものとする。このときの標本化周波数は $f_s = (\text{ア})$ Hz である。 $x(t)$ と $x(n)$ のフーリエ変換を各々 $X(j\omega), X(e^{j\omega})$ とすると, $X(e^{j\omega})$ は $X(j\omega)$ を (イ) Hz の整数倍だけシフトして加算したものである (但し, 振幅方向の変化は無視する)。従っ

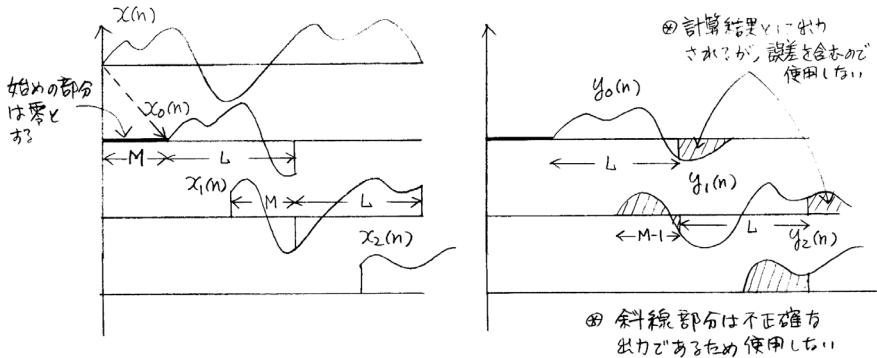


図 3.9 無限長信号に対する DFT による畳み込み和 - 重畳保存形 -

て、 $X(e^{j\omega})$ は (ウ) Hz を周期とする周期関数となる。 $X(j\omega)$ の成分が f_c Hz まで分布しているとする (但し、 f_c Hz において $X(j\omega) \neq 0$ とする)、 f_s は (エ) を満たす必要がある。次に、 $X(e^{j\omega})$ を Δf Hz 間隔で標本化して $\tilde{X}(k)$ とし、この逆離散フーリエ変換を $\tilde{x}(n)$ とする。これは、 $x(n)$ を $N =$ (オ) サンプルの整数倍だけシフトして加算したものである。 $\tilde{x}(n)$ を式で表すと (カ) となる。 $\tilde{x}(n)$ の周期は (キ) 秒または (ク) 秒と表される。 $x(t)$ が $t = 0 \sim T_0$ の範囲に分布しているとする (但し、 $x(0) \neq 0, x(T_0) \neq 0$ とする)、 Δf は (ケ) を満たす必要がある。以上より、時間領域でも周波数領域でも、その標本間隔の逆数が他の領域の (コ) を決める。また、成分の分布範囲の逆数が他の領域の (サ) を決める。」

< 選択肢 > (1) T , (2) $1/T$, (3) f_s , (4) $1/f_s$, (5) $2f_c < f_s$, (6) $2f_c > f_s$, (7) $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN)$, (8) Δf , (9) $1/\Delta f$, (10) $\Delta f > 1/T_0$, (11) $\Delta f < 1/T_0$, (12) 標本間隔の上限, (13) 標本化周波数, (14) 周期, (15) $f_s/\Delta f$, (16) $\Delta f/f_s$, (17) NT , (18) T/N .

2. 次の文章は離散フーリエ変換 (DFT) について述べたものである。空欄に入る適切な式や語句を下欄より選択して番号で答えよ。

「連続時間信号 $x(t)$ を T 秒間隔で標本化し $x(n) = x(nT)$ とする。 $x(n)$ のフーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ は (ア) Hz を周期とする関数である。標本化周波数 f_s は T を用いて (イ) と表される。周波数領域における標本化定理が成り立つために $x(t)$ の周波数成分は (ウ) 以下に制限する必要がある。 $X(e^{j\omega})$ を Δf Hz 間隔で標本化すると、これに対する時間信号 $\tilde{x}(n)$ は (エ) を周期とする関数となる。従って、連続時間波形 $x(t)$ が $t = 0 \sim T_0$ に分布しているとする (但し, $x(0) \neq 0, x(T_0) \neq 0$ とする), Δf は (オ) を満たす必要がある。周波数領域の標本点の数は 1 周期が f_s であるから $N =$ (カ) となる。時間領域の標本点の数は (キ) となる。これを $M + 1$ とすると, M は (ク) となる。(オ) の条件と (イ), (カ), (ク) の関係を考慮すると N は (ケ) の条件を満たす必要がある。」

<選択肢> (1) T , (2) $1/T$, (3) f_s , (4) $f_s/2$, (5) $2f_s$, (6) $f_s/\Delta f$, (7) $\Delta f/f_s$, (8) $T_0/T + 1$, (9) $M < N$, (10) $M > N$, (11) Δf , (12) $1/\Delta f$, (13) $T_0 < 1/\Delta f$, (14) $T_0 > 1/\Delta f$, (15) T_0/T , (16) T/T_0 .

3. 離散フーリエ変換 (DFT) に関して以下の問に答えよ。

連続時間信号 $x(t)$ は $0 \leq t \leq 1$ 秒に分布しており (但し, $x(0) \neq 0, x(1 \text{ 秒}) \neq 0$ とする), 周波数成分 $X(j\omega)$ は 4kHz 以下に分布している (但し, 4kHz において $X(j\omega) = 0$ とする)。 $x(t)$ を標本化周波数 f_s で標本化して得られる離散時間信号を $x(n)$ とし, そのフーリエ変換を $X(e^{j\omega})$ とする。

- (a) 標本化周波 f_s が満たすべき条件を求めよ。
- (b) 上の条件から $f_s = 8 \text{ kHz}$ とする。時間領域における標本点数 (サンプル数) $M + 1$ を求めよ。
- (c) 周波数領域における標本間隔を Δf とするとき, 周波数領域における 1 周期分の標本点数 N を Δf で表せ。

- (d) $x(n)$ のフーリエ変換 $X(e^{j\omega})$ を標準化したものを $\tilde{X}(k)$ とし、この逆フーリエ変換 $\tilde{x}(n)$ において標準化定理が成り立つために N の満たすべき条件を求めよ。さらに、この条件を Δf の条件として表せ。
- (e) 上の条件を満たす N で最も小さい 2 のべき乗を求めよ。
- (f) N を上のように決めた時の $\tilde{x}(n)$ を式で表せ ($x(n)$ との関係を表す式)。
- (g) $x(n)$ の波形を任意に決め、 $x(n)$ と $\tilde{x}(n)$ の関係の概略図を示せ。
4. インパルス応答 $h(n), n = 0 \sim 3$ と入力信号 $x(n), n = 0 \sim 3$ の離散フーリエ変換 (DFT) を $H(k), k = 0 \sim 3, X(k), k = 0 \sim 3$ とする。 $Y(k) = H(k)X(k), k = 0 \sim 3$ の逆離散フーリエ変換 (IDFT) を $y(n), n = 0 \sim 3$ とする。 $y(n), n = 0 \sim 3$ を $h(n), n = 0 \sim 3$ と $x(n), n = 0 \sim 3$ を用いて式 (3.34) のように表せ。
5. インパルス応答 $h(n), n = 0 \sim 2$ と入力信号 $x(n), n = 0 \sim 3$ の線形畳み込みを $y(n)$ とする。 $y(n)$ を次のように計算する。まず、 $h(n)$ と $x(n)$ の離散フーリエ変換 (DFT) $H(k), X(k)$ を計算する。次に、これらの積 $Y(k) = H(k)X(k)$ を計算する。最後に、 $Y(k)$ の逆離散フーリエ変換 (IDFT) として $y(n)$ を計算する。このとき、 $h(n)$ と $x(n)$ では零のサンプルを加えてサンプル数を増やす必要がある。離散フーリエ変換 (DFT) における必要なサンプル数を求めよ。
6. インパルス応答 $h(n), n = 0 \sim M - 1$ と無限長の入力信号 $x(n), n = 0 \sim \infty$ の線形畳み込みを $y(n)$ とする。 $y(n)$ を次のように計算する。まず、 $h(n)$ と $x(n)$ の離散フーリエ変換 (DFT) $H(k), X(k)$ を計算する。次に、これらの積 $Y(k) = H(k)X(k)$ を計算する。最後に、 $Y(k)$ の逆離散フーリエ変換 (IDFT) として $y(n)$ を計算する。これを実現するための方法の一つを示せ。(ヒント) 無限長である $x(n)$ を有限長 (N サンプル) の和として表し、有限長のブロックごとに離散フーリエ変換 (DFT) を

行う。

3.5 附録

3.5.1 連続時間信号のフーリエ変換

周期波形の表現

図 3.10 に示す T_0 を周期とする連続時間・周期波形 $x(t)$ を考える。 $x(t)$ は次式を満たす。

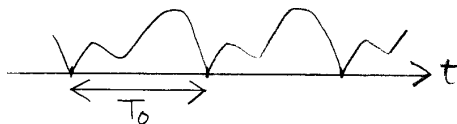


図 3.10 T_0 秒を周期とする連続時間・周期波形

$$x(t) = x(t + nT_0), \quad T_0 > 0, n \text{ は整数} \quad (3.48)$$

T_0 を周期とする周期波形は次のようにフーリエ級数に展開できる。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.49)$$

周期波形の周波数成分は周波数軸上を連続に分布するのではなく、 $k\omega_0$ の位置にとびとびに現れる線スペクトルとなる。各周波数成分の大きさ a_k は次式で与えられる。

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.50)$$

式 (3.49) の $x(t)$ を上式の右辺に代入すると、この右辺は次に示すように a_k となることが分かる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} a_m \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$= a_k \quad (3.52)$$

$$\text{但し, } \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \quad (3.53)$$

フーリエ変換が収束するための条件は次のようになる。

(1) 波形の二乗積分が有界

$$\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.54)$$

この場合,

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.55)$$

としたとき, 次のように打ち切り誤差は $N \rightarrow \infty$ に対して零に収束する。

$$E_N = \int_0^{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \quad (3.56)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0 \quad (3.57)$$

(2) 波形の絶対値積分が有界

$$\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (3.58)$$

連続的に変化する周期波形の場合は, フーリエ級数は収束し, かつ, t のあらゆる点で原信号に等しくなる。また, 不連続点を有する周期波形 (例: 方形波列) については, 不連続点を除けば, フーリエ級数表現は原信号に等しくなり, 不連続点では, その両側の値の平均値にフーリエ級数は収束する。

連続時間の非周期波形

まず, 図 3.11 に示す波形を考える。 $[-T_1, T_1]$ に分布する方形波を $x(t)$ とし, $[-\infty, \infty]$ に分布する方形波列を $\tilde{x}(t)$ とする。一般に $x(t)$ は任意の波形でよい。

式 (3.49), (3.50) より,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.59)$$

$$a_k = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} \quad (3.60)$$

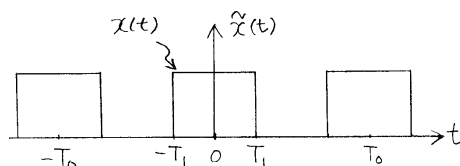


図 3.11 方形波列

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

と表される． T_0 と T_1 の関係を変化させたときの a_k を図 3.12 に示す．ここでは， $T_0 a_k$ で表されている． T_0/T_1 が大きくなるにしたがい標本点は密に分布する．

次に， $T_0 \rightarrow \infty$ とすると， $\tilde{x}(t)$ は単一の方角波 $x(t)$ になる．

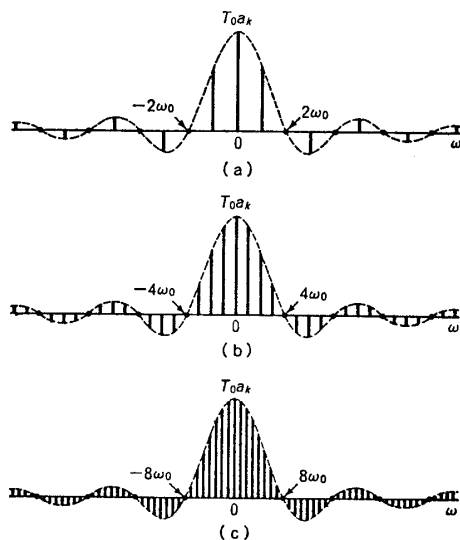


図 3.12 周期的方形波のフーリエ係数とその包絡線．(a) $T_0/T_1 = 4$ ，(b) $T_0/T_1 = 8$ ，(c) $T_0/T_1 = 16$ ．

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = x(t) \quad (3.61)$$

a_k を $x(t)$ で表す .

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.63)$$

ここで ,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.64)$$

とする . 式 (3.63) より ,

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0) \quad (3.65)$$

上式を式 (3.59) に代入する .

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.66)$$

さらに , $\omega_0 = 2\pi/T_0$ であることを考慮すると ,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \quad (3.67)$$

となる . この式は図 3.13 に示す方形の面積 (斜線部分) $X(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \omega_0$ を加算したものである . $T_0 \rightarrow \infty$ は $\omega_0 \rightarrow 0$ に対応するから , $\tilde{x}(t)$ が $x(t)$ に収束し , 加算演算が積分演算に収束し , 次の関係を得る .

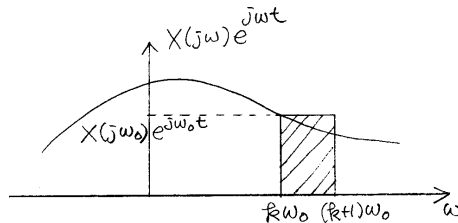


図 3.13 逆フーリエ変換における積分の近似的な図式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.68)$$

式 (3.64) , (3.68) が連続時間・非周期波形に対するフーリエ変換対である。もう一度、以下にまとめる。

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.69)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.70)$$

3.5.2 ラプラス変換と z 変換の関係

ラプラス変換から z 変換を導く

ラプラス変換対は次式で与えられる。

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \quad (3.71)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (3.72)$$

$x(t)$ を標本化して $x_d(t)$ とし, $x_d(t)$ を式 (3.71) によりラプラス変換する。

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} X_d(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-skT} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$\delta(t)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \quad (3.75)$$

式 (3.74) において,

$$z = e^{sT} \quad (3.76)$$

とすれば,

$$X_d(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (3.77)$$

上式の右辺は $x(kT)$ に対する z 変換になっている. すなわち, ラプラス変換から z 変換が導かれた.

z 変換からラプラス変換を導く

z 変換対において, $T \rightarrow 0$ とすることにより, ラプラス変換対が得られることを示す. まず,

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz \quad (3.78)$$

において, z を s で置換する. 式 (3.76) より,

$$\frac{dz}{ds} = Te^{sT} = Tz \quad (3.79)$$

$$z^{-1} dz = T ds \quad (3.80)$$

であるから,

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\pi/T}^{\sigma+j\pi/T} X(e^{sT})e^{skT} T ds \quad (3.81)$$

ここで,

$$a(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\pi/T}^{\sigma+j\pi/T} X(e^{sT})e^{skT} ds \quad (3.82)$$

とおく. z 変換の式より

$$X(e^{sT}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T a_k(kT) e^{-skT} \quad (3.83)$$

上式の $T a_k(kT) e^{-skT}$ は図 3.14 の斜線部分の面積に相当するから,

$$\lim_{T \rightarrow 0} X(e^{sT}) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-st} dt \quad (3.84)$$

となる. 一方,

$$X(e^{sT}) = X_d(s) \quad (3.85)$$

であり, また, $X_a(s)$ と $X_d(s)$ は図 3.15 の関係にあるから,

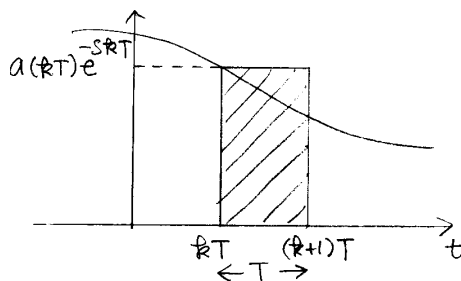
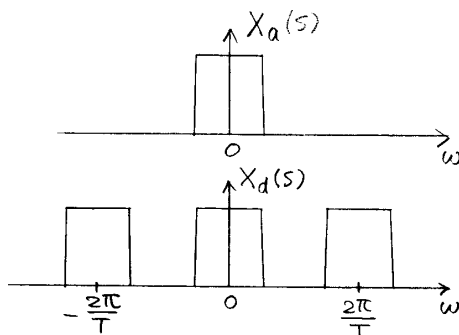


図 3.14 ラプラス変換における積分の近似的な図式

図 3.15 $X_a(s)$ と $X_d(s)$ の関係

$$\lim_{T \rightarrow 0} X(e^{sT}) = X_a(s) \quad (3.86)$$

となる。式 (3.84), (3.86) より

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-st} dt \quad (3.87)$$

さらに, 式 (3.82) より,

$$\lim_{T \rightarrow 0} a(kT) = a(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \pi/T}^{\sigma + \pi/T} X(e^{sT}) s^{st} dt \quad (3.88)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} X_a(s) s^{st} dt \quad (3.89)$$

となり, 式 (3.72) より,

$$x(t) = a(t) \quad (3.90)$$

である．式 (3.87) , (3.89) より ,

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.91)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_a(s)e^{st} ds \quad (3.92)$$

となり , ラプラス変換対が得られた .

フーリエ変換についても全く同じ議論が成り立つ . 以上をまとめると以下のようになる .

連続時間フーリエ変換

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.93)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.94)$$

離散時間フーリエ変換

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n T} \quad (3.95)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega T})e^{j\omega n T} d\omega T \quad (3.96)$$

連続時間から離散時間へは標準化で関係づけられ , その逆は $T \rightarrow 0$ により関係づけられる .

ラプラス変換

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.97)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.98)$$

z 変換

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.99)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz \quad (3.100)$$

ラプラス変換から z 変換へは標準化により関係づけられ、その逆は $T \rightarrow 0$ により関係づけられる。

3.5.3 基本演算，基本関数のラプラス変換

$x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ とする。

微分演算

$$\frac{dx(t)}{dt} \iff sX(s) \quad (3.101)$$

微分演算

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \iff \frac{1}{s}X(s) + x(0) \quad (3.102)$$

基本関数

$$ae^{s_k t} \iff \frac{a}{s - s_k} \quad (3.103)$$