

4

離散フーリエ変換の計算法

離散フーリエ変換 (DFT) を用いる目的の一つに計算量の低減がある。本章では、DFT の効率的な計算法である高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT) の仕組みについて述べる。

4.1 離散フーリエ変換の直接計算

DFT 及び IDFT の式を以下に示す。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (4.1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (4.2)$$

$x(n)$ と $X(k)$ が複素数であるとする、 N 点の DFT を計算するのに必要な複素乗算が N^2 回、複素加算が $N(N-1) \simeq N^2$ 回である。実数の乗算は $4N^2$ 回、加算は $2N(2N-1)$ 回である。いずれにしても N^2 のオーダー ($O(N^2)$ と略す) の計算量が必要であり、 N が大きい場合は問題となる。

4.2 高速フーリエ変換 (FFT)

4.2.1 周波数間引き radix2 FFT アルゴリズム

(1) 行列表現

式 (4.1) を行列の形で表す。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N^0 & w_N^0 & \cdots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^1 & \cdots & w_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{N-1} & \cdots & w_N^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$w_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$$

上式は、下記の性質を利用して N 個の $w_N^0, w_N^1, \dots, w_N^{N-1}$ を用いて表されている。

$$kn = mN + r, \quad 0 \leq r \leq N-1$$

$$w_N^{kn} = w_N^r \quad (4.4)$$

さらに、式 (4.3) を次のように表す。

$$\mathbf{X}(N) = \mathbf{F}(N)\mathbf{x}(N) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{X}(N) = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}(N) = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T \quad (4.7)$$

$$(4.8)$$

$[\]^T$ はベクトルや行列の転置を表す。 $\mathbf{F}(N)$ が N 点 DFT の行列表現である。

〔2〕 行の入れ替え

周波数間引き (Decimation-in-frequency) では、 $\mathbf{F}(N)$ における行の入れ替えを行う。 $\mathbf{X}(N)$ と $\mathbf{F}(N)$ における行の入れ替えを行う。第 $2k$ 行を第 k 行とする部分行列と対応する出力ベクトル、及び第 $2k+1$ 行を第 k 行とする部分行列とベクトルに分離する。

$$\hat{\mathbf{X}}(N) = \hat{\mathbf{F}}(N)\mathbf{x}(N) \quad (4.9)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(N) = [\hat{\mathbf{X}}_0(N/2), \hat{\mathbf{X}}_1(N/2)]^T \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_0(N/2) = [X(0), X(2), \dots, X(N-2)]^T \quad (4.11)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_1(N/2) = [X(1), X(3), \dots, X(N-1)]^T \quad (4.12)$$

$$\hat{X}_0(k) = X(2k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (4.13)$$

$$\hat{X}_1(k) = X(2k + 1), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x}(N) = [\mathbf{x}_0(N/2), \mathbf{x}_1(N/2)]^T \quad (4.15)$$

$$\mathbf{x}_0(N/2) = [x(0), x(1), \dots, x(N/2 - 1)]^T \quad (4.16)$$

$$\mathbf{x}_1(N/2) = [x(N/2), x(N/2 + 1), \dots, x(N - 1)]^T \quad (4.17)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(N/2) & \mathbf{F}_2(N/2) \\ \mathbf{F}_3(N/2) & \mathbf{F}_4(N/2) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

〔3〕 部分行列の性質

1. $\mathbf{F}_1(N/2)$ と $\mathbf{F}_2(N/2)$ はサイズが $N/2$ の DFT 行列である。すなわち、これらの行列の第 k 行、第 n 列は

$$w_{N/2}^{kn}, \quad w_{N/2} = e^{-\frac{j2\pi}{N/2}} \quad (4.19)$$

で与えられる。

(証明)

$\mathbf{F}_1(N/2)$ の第 k 行、第 n 列要素は次のように変形できる。

$$w_N^{2kn} = e^{-j2\pi(2kn)/N} = e^{-j2\pi kn/(N/2)} = w_{N/2}^{kn} \quad (4.20)$$

$$0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1$$

これは、 $\mathbf{F}(N/2)$ の第 k 行、第 n 列の要素に対応する。

$\mathbf{F}_2(N/2)$ の第 k 行、第 n 列の要素は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} w_N^{2k(n+N/2)} &= e^{-j2\pi(2k(n+N/2))/N} = e^{-j2\pi kn/(N/2) - j2\pi k} \\ &= e^{-j2\pi kn/(N/2)} = w_{N/2}^{kn} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1$$

これは、 $\mathbf{F}(N/2)$ の第 k 行、第 n 列の要素に対応する。(証明終わり)

2. $\mathbf{F}_3(N/2)\mathbf{F}_4(N/2)$ は次の関係を満たす。

$$\mathbf{F}_3(N/2) = -\mathbf{F}_4(N/2) \quad (4.22)$$

(証明)

$F_3(N/2)$ の第 k 行, 第 n 列の要素は

$$w_N^{(2k+1)n} = e^{-j2\pi(2k+1)n/N}, \quad 0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (4.23)$$

一方, $F_4(N/2)$ の第 k 行, 第 n 列の要素は次のように表される。

$$\begin{aligned} w_N^{(2k+1)(n+N/2)} &= e^{-j2\pi(2k+1)(n+N/2)/N} \\ &= e^{-j2\pi(2k+1)n} e^{-j2\pi(N/2)/N} \\ &= -e^{-j2\pi(2k+1)n}, \quad 0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

これは, $F_3(N/2)$ の第 k 行, 第 n 列要素を -1 倍したものである。(証明終わり)

3. $F_3(N/2)$ は次のように分解できる。

$$F_3(N/2) = F(N/2)D(N/2) \quad (4.25)$$

$$D(N/2) = \text{diag}(w_N^0, w_N^1, \dots, w_N^{N/2-1}) \quad (4.26)$$

(証明)

$F_3(N/2)$ の第 k 行, 第 n 列の要素は次のように表される。

$$\begin{aligned} w_N^{(2k+1)n} &= e^{-j2\pi(2k+1)n/N} = e^{-j2\pi kn/(N/2)} e^{-j2\pi n/N} \\ &0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

上式は $F(N/2)$ の第 k 行, 第 n 列の要素に $e^{-j2\pi n/N}$ を掛けたものである。この値は行によって変化せず, 列に対応して変化するので, $F(N/2)$ に右側から次の対角行列を掛けたことに相当する。

$$\text{diag}\left(e^{j2\pi \frac{0}{N}}, e^{-j2\pi \frac{1}{N}}, e^{-j2\pi \frac{2}{N}}, \dots, e^{-j2\pi \frac{N/2-1}{N}}\right) \quad (4.28)$$

この対角行列は式 (4.26) の対角行列に等しい。(証明終わり)

[4] DFT 行列の分解

以上より, $F(N)$ は次のように分解できる。

$$\hat{F}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(N/2) & \mathbf{F}(N/2) \\ \mathbf{F}(N/2)\mathbf{D}(N/2) & -\mathbf{F}(N/2)\mathbf{D}(N/2) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{F}(N/2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(N/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}(N/2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(N/2) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \mathbf{I}(N/2) & \mathbf{I}(N/2) \\ \mathbf{I}(N/2) & -\mathbf{I}(N/2) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$\mathbf{I}(N/2)$ はサイズが $N/2$ の単位行列である。この式をシグナルフローグラフで表すと図 4.1 のようになる。上式の最後のブロックはたすきがけの加減算で、 $\mathbf{D}(N/2)$ は $N/2$ 個の複素乗算で実現される。さらに、 $\mathbf{F}(N/2)$ の第 k 行、第 n

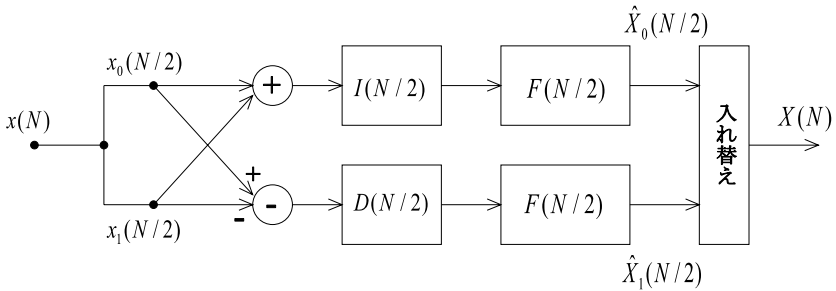


図 4.1 式 (4.30) を実行する基本回路

列の要素は

$$w_{N/2}^{kn}, \quad w_{N/2} = e^{-j2\pi/(N/2)}, \quad 0 \leq k, n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (4.31)$$

であり、 $\mathbf{F}(N)$ と同じ性質を持つ DFT 行列であるから、 $\mathbf{F}(N)$ と同じように分割できる。すなわち、図 4.1 の $\mathbf{F}(N/2)$ のブロック内が全体の構成と同じように分解できる。これを繰り返して FFT が構成される。

〔5〕 出力サンプルの並び順

式 (4.11), (4.12) に示した、行の入れ替え (周波数間引き) を繰り返すことにより、出力サンプルの順番のは次のように変化する。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 000 \\ 010 \\ 100 \\ 110 \\ 001 \\ 011 \\ 101 \\ 111 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 000 \\ 100 \\ 010 \\ 110 \\ 001 \\ 101 \\ 011 \\ 111 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

これから分かるように、周波数間引きで得られるフーリエ変換のサンプル番号は時間信号のサンプル番号を2進数で表したとき、そのビット反転した形式になる。

(例題)

$N = 8$ の場合の例を示す。DFT 行列 $F(8)$ は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$w = e^{-j2\pi/8} \quad (4.34)$$

周波数間引き（行の入れ替え）を行う。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(4) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(3) \\ X(5) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 & w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 & w^4 & w^7 & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 & w^4 & w^1 & w^6 & w^3 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_0(4) \\ \hat{\mathbf{X}}_1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(4) & \mathbf{F}_2(4) \\ \mathbf{F}_3(4) & \mathbf{F}_4(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(4) \\ \mathbf{x}_1(4) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_0(4) = [X(0), X(2), X(4), X(6)]^T \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_1(4) = [X(1), X(3), X(5), X(7)]^T \quad (4.38)$$

$$\mathbf{x}_0(4) = [x(0), x(1), x(2), x(3)]^T \quad (4.39)$$

$$\mathbf{x}_1(4) = [x(4), x(5), x(6), x(7)]^T \quad (4.40)$$

$$\mathbf{F}_1(4) = \mathbf{F}_2(4) = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_4(4) &= w^4 \mathbf{F}_3(4) = -\mathbf{F}_3(4) \\ &= - \begin{bmatrix} w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_3(4) &= \begin{bmatrix} w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^1 \\ w^0 & w^5 & w^2 & w^7 \\ w^0 & w^7 & w^6 & w^5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^4 & w^0 & w^4 \\ w^0 & w^6 & w^4 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^3 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{F}_1(4)\mathbf{D}(4) \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_0(4) \\ \hat{X}_1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(4) & \mathbf{F}_1(4) \\ \mathbf{F}_1(4)\mathbf{D}(4) & -\mathbf{F}_1(4)\mathbf{D}(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(4) \\ \mathbf{x}_1(4) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(4) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_1(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}(4) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(4) \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \mathbf{I}(4) & \mathbf{I}(4) \\ \mathbf{I}(4) & -\mathbf{I}(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(4) \\ \mathbf{x}_1(4) \end{bmatrix} \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

上式を実行する回路を図 4.2 に示す .

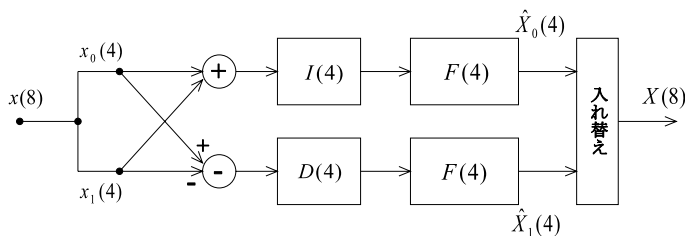


図 4.2 式 (4.45) を実行する回路

さらに , $\mathbf{F}_1(4)$ は式 (4.34) の $w = e^{-j2\pi/8}$ を $w = e^{-j2\pi/4}$ で置き換えることにより

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(4) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(3) \\ X(5) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$w = e^{-j2\pi/4} \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & & & \\ & w^1 & & \\ & & w^2 & \\ & & & w^3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \right) \quad (4.50)$$

となる。 $F_1(4)$ は 4 点 DFT の行列であるから、 $F(4)$ と表される。

以上の過程を実行する回路を図 4.3 に示す。

さらに、 $F(4)$ は $F(8)$ と同じ行列分解ができるから、周波数間引き (行の入れ替え) により

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{00}(2) \\ \hat{X}_{01}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(2) & F_2(2) \\ F_3(2) & F_4(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10}(2) \\ \mathbf{x}_{11}(2) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

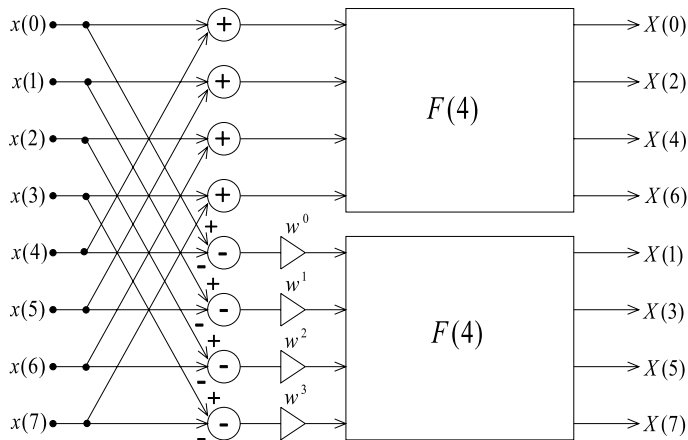


図 4.3 式 (4.46) から (4.50) までを実行する回路

$$\hat{\mathbf{X}}_{00}(2) = [X(0), X(4)]^T \quad (4.53)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{01}(2) = [X(2), X(6)]^T \quad (4.54)$$

$$\mathbf{x}_{10}(2) = [x_1(0), x_1(1)]^T \quad (4.55)$$

$$\mathbf{x}_{11}(2) = [x_1(2), x_1(3)]^T \quad (4.56)$$

$$\mathbf{F}_1(2) = \mathbf{F}_2(2) = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{F}_4(2) = w^2 \mathbf{F}_3(2) = -\mathbf{F}_3(2) = - \begin{bmatrix} w^0 & w^1 \\ w^0 & w^3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{F}_3(2) = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & 0 \\ 0 & w^1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_1(2) \mathbf{D}(2) \quad (4.59)$$

以上の関係を考慮すると，式 (4.52) は式 (4.45) と同じように分解できる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{00}(2) \\ \hat{\mathbf{X}}_{01}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(2) & \mathbf{F}_1(2) \\ \mathbf{F}_3(2) & -\mathbf{F}_3(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10}(2) \\ \mathbf{x}_{11}(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_1(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}(2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(2) \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} \mathbf{I}(2) & \mathbf{I}(2) \\ \mathbf{I}(2) & -\mathbf{I}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10}(2) \\ \mathbf{x}_{11}(2) \end{bmatrix} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

$F_1(2)$ は $F_1(4)$ と同様に 2 点 DFT 行列に相当する。

以上の全体構成を図 4.4 に示す。入力側からサイズを半分に下げながら同じ構造が繰り返されていることが分かる。入力 $x(n)$ と出力 $X(k)$ のサンプル番号の対応は式 (4.32) で示したようにビットリバースになっていることが分かる。出力はさらに $X(0) \rightarrow X(1) \rightarrow X(3) \rightarrow \dots \rightarrow X(7)$ の順に並び替えられる。

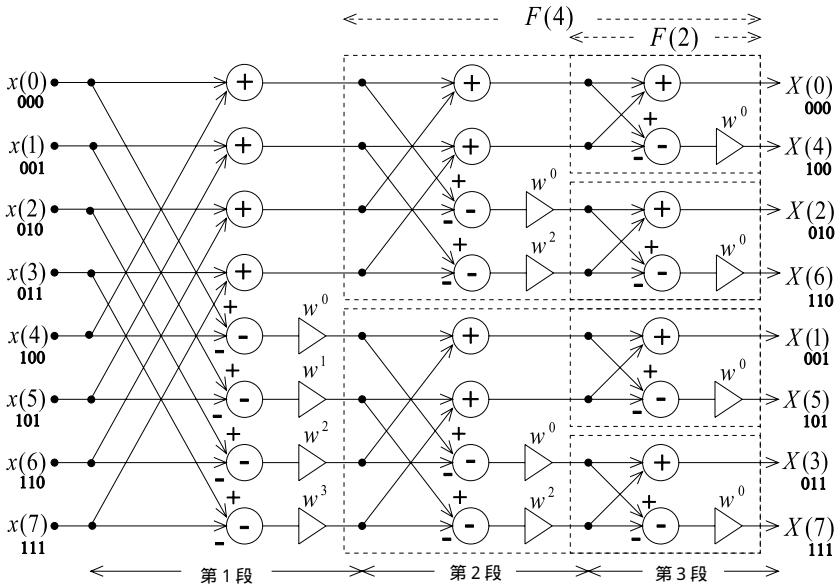


図 4.4 周波数間引きによる 8 点 DFT ($F(8)$) の FFT 構成。 $w = e^{-j2\pi/8}$ 。

4.2.2 FFT の特徴

〔1〕 基本回路

図 4.5 に示すバタフライ回路を基本とする。

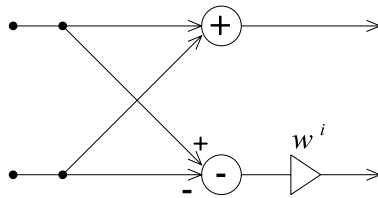


図 4.5 FFT の基本回路 - バタフライ回路 -

〔2〕 計算量

乗算は対角行列 $D(N/2^m)$, $m = 2, \dots, L = \log_2 N$ でのみ生じる。入力信号を複素数とすると、各段で $N/2$ 回の複素乗算（実数乗算としては $2N$ 回）が必要である。複素加算は N 回、実数加算としては複素乗算における加算も含めて $2N + N$ 回である。段数は $L = \log_2 N$ であるから、全体の計算量は表 4.1 のようになる。 $\log_2 N$ は N に比べて十分に小さい値であり、FFT の計算量はオー

表 4.1 radix2-FFT における計算量

演算	複素数計算	実数計算
乗算	$\frac{N}{2} \log_2 N$	$2N \log_2 N$
加算	$N \log_2 N$	$3N \log_2 N$

ダ $N (O(N))$ である。DFT の直接計算では $O(N^2)$ が必要であったので FFT により計算量が大幅に低減されていることが分かる。特に、 N が大きい場合にその効果は顕著である。

線形な畳み込み和の場合は、インパルス応答を N サンプルとすると、出力 1 サンプルを計算するのに $O(N)$ 回の計算が必要であり、出力 N サンプルでは $O(N^2)$ の計算量が必要になる。これに対して、FFT による畳み込み和は $O(N)$ の計算量で済む。

4.2.3 時間間引き FFT アルゴリズム

時間間引き FFT は時間信号 $x(N)$ を入れ替えることになるが、これは DFT 行列の列の入れ替えに相当する。DFT 行列で偶数番目と奇数番目の列を入れ替えることにより、次のように分解できる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(N) &\rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{F}(N/2) & \mathbf{D}(N/2)\mathbf{F}(N/2) \\ \mathbf{F}(N/2) & -\mathbf{D}(N/2)\mathbf{F}(N/2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}(N/2) & \mathbf{I}(N/2) \\ \mathbf{I}(N/2) & -\mathbf{I}(N/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}(N/2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(N/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(N/2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(N/2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.}$$

さらに、時間信号 $x(N)$ とその DFT である $X(N)$ を次のように分解する。

$$\hat{x}_0(N/2) = [x(0), x(2), \dots, x(N-2)]^T \tag{4.63}$$

$$\hat{x}_1(N/2) = [x(1), x(3), \dots, x(N-1)]^T \tag{4.64}$$

$$\mathbf{X}_0(N/2) = [X(0), X(1), \dots, X(N/2)]^T \tag{4.65}$$

$$\mathbf{X}_1(N/2) = [X(N/2+1), X(N/2+1), \dots, X(N-1)]^T \tag{4.66}$$

ブロック図を図 4.6 に示す。周波数間引き FFT に比べて演算の順番が違っているが、基本的には同じである。ただ、各段で時間間引きをする必要があり、最後に一括してビットリバースで並び順が決まる周波数間引き FFT とは異なる。

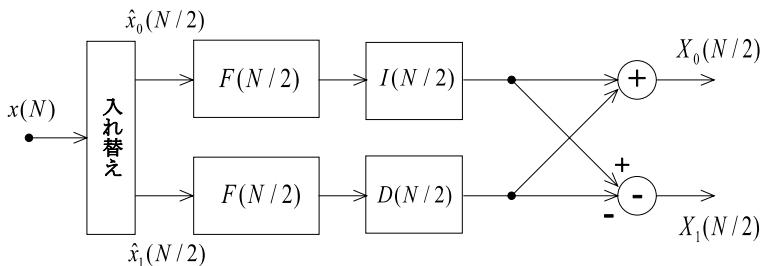


図 4.6 時間間引きによる FFT の基本構成

4.2.4 radix4-FFT アルゴリズム

間引く割合を変えることにより, FFT の変形を考えることができる。ここでは, 4 個おきに周波数間引きを行う radix4-FFT アルゴリズムについて説明する。

DFT 行列の行を 4 個おきに間引くことにより出力は次のようになる。

$$\hat{\mathbf{X}}(N) = \hat{\mathbf{F}}(N)\mathbf{x}(N) \quad (4.67)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(N) = [\hat{\mathbf{X}}_0(N/4), \hat{\mathbf{X}}_1(N/4), \hat{\mathbf{X}}_2(N/4), \hat{\mathbf{X}}_3(N/4)]^T \quad (4.68)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_0(N/4) = [X(0), X(4), \dots, X(N-4)]^T \quad (4.69)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_1(N/4) = [X(1), X(5), \dots, X(N-3)]^T \quad (4.70)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_2(N/4) = [X(2), X(6), \dots, X(N-2)]^T \quad (4.71)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_3(N/4) = [X(3), X(7), \dots, X(N-1)]^T \quad (4.72)$$

$$\hat{X}_0(k) = X(4k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1$$

$$\hat{X}_1(k) = X(4k+1), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1$$

$$\hat{X}_2(k) = X(4k+2), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1$$

$$\hat{X}_3(k) = X(4k+3), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1$$

$$\mathbf{x}(N) = [\mathbf{x}_0(N/4), \mathbf{x}_1(N/4), \mathbf{x}_2(N/4), \mathbf{x}_3(N/4)]^T \quad (4.73)$$

$\mathbf{x}(N)$ では入れ替えは行われず, 順番に $N/4$ 個ずつに区切ったのみである。さらに, DFT 行列は次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{F}}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(N/4) & \mathbf{F}_1(N/4) & \mathbf{F}_2(N/4) & \mathbf{F}_3(N/4) \\ \mathbf{F}_1(N/4) & -j\mathbf{F}_1(N/4) & -\mathbf{F}_1(N/4) & j\mathbf{F}_1(N/4) \\ \mathbf{F}_2(N/4) & -\mathbf{F}_2(N/4) & \mathbf{F}_2(N/4) & -\mathbf{F}_2(N/4) \\ \mathbf{F}_3(N/4) & j\mathbf{F}_3(N/4) & -\mathbf{F}_3(N/4) & -j\mathbf{F}_3(N/4) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\hat{f}(k, n) = f(4k, n) \quad (4.75)$$

$$\hat{f}(k + N/4, n) = f(4k + 1, n) \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \quad (4.76)$$

$$\hat{f}(k + N/2, n) = f(4k + 2, n) \quad 0 \leq n \leq -1 \tag{4.77}$$

$$\hat{f}(k + 3N/4, n) = f(4k + 3, n) \tag{4.78}$$

さらに、 $F_i(N/4)$ は $N/4$ サンプルの DFT 行列 $F(N/4)$ と対角行列 $D_i(N/4)$ に分解できる。

$$F_i(N/4) = F(N/4)D_i(N/4) \tag{4.79}$$

$$d_i(k, k) = e^{-j2\pi ki/N} \quad D_i(N/4) \text{ の } (k, k) \text{ 要素} \tag{4.80}$$

これらをまとめると、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{X}_0(N/4) \\ \hat{X}_1(N/4) \\ \hat{X}_2(N/4) \\ \hat{X}_3(N/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(N/4)D_0(N/4) \\ F(N/4)D_1(N/4) \\ F(N/4)D_2(N/4) \\ F(N/4)D_3(N/4) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} I(N/4) & I(N/4) & I(N/4) & I(N/4) \\ I(N/4) & -jI(N/4) & -I(N/4) & jI(N/4) \\ I(N/4) & -I(N/4) & I(N/4) & -I(N/4) \\ I(N/4) & jI(N/4) & -I(N/4) & -jI(N/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(N/4) \\ x_1(N/4) \\ x_2(N/4) \\ x_3(N/4) \end{bmatrix} \tag{4.81} \end{aligned}$$

上式を実現するシグナルフローグラフは図 4.7 のようになる。 $\hat{X}_i(N/4)$ の要素について並び替えを行い、 $F(N/4)$ について $F(N)$ と同様な行列分解を行うことができる。この操作を繰り返して周波数間引きの radix4-FFT を計算するシグナルフローグラフが得られる。

[1] 計算量 radix4-FFT の計算量を表 4.2 に示す。

表 4.2 radix4-FFT における計算量

演算	複素数計算	実数計算
乗算	$\frac{3}{4}N \log_4 N$	$3N \log_4 N$
加算	$2N \log_4 N$	$(4N + \frac{3}{2}N) \log_4 N$

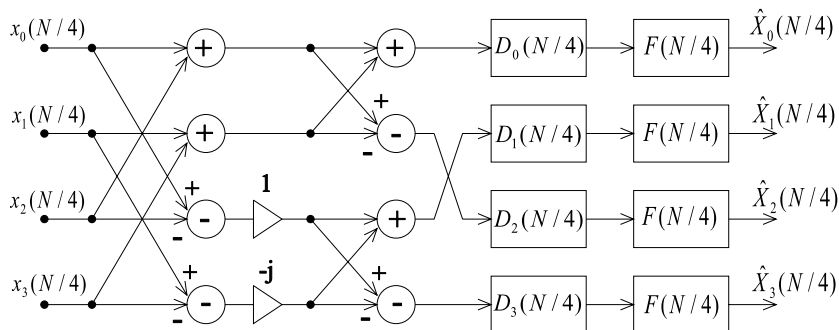


図 4.7 radix4-FFT の基本構成

radix2-FFT と radix4-FFT の計算量の比較を表 4.3 に示す。radix-4-FFT の方が計算回数が少なくできるが、サンプル数が $N = 4^L$ という制約がある。

表 4.3 radix2-FFT と radix4-FFT の計算量比較

N	radix2-FFT		radix4-FFT	
	乗算	加算	乗算	加算
64	768	1152	576	1056
128	1792	2688	-	-
256	4096	6144	3072	5632
512	9216	13824	-	-
1024	20480	30720	15360	28160

4.3 逆 FFT

式 (4.1), (4.2) から分かるように, DFT と逆 (Inverse) DFT の違いはスケーリング係数 $1/N$ と指数部の極性である。従って, IDFT は DFT において, $\exp(-j\omega T)$ を $\exp(j\omega T)$ に変え, $1/N$ を考慮すればよく, IDFT の高速算法のアルゴリズムは FFT と同じである。 $1/N$ の演算は格段 (ステージ) で $1/2$ の演算を行う方法がダイナミックレンジや雑音特性の関係から望ましい。

演習問題

1. 次の 4 サンプル DFT の FFT 化について以下の問いに答えよ .

$$F(4) = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}, \quad w = e^{-j2\pi/4} \quad (4.82)$$

- (a) 周波数間引きにより, $F(4)$ を次のように変形し, $F_1(2)$, $F_2(2)$, $F_3(2)$, $F_4(2)$ を求めよ .

$$\hat{F}(4) = \begin{bmatrix} F_1(2) & F_2(2) \\ F_3(2) & F_4(2) \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

- (b) $F_1(2)$ と $F_2(2)$, 及び, $F_3(2)$ と $F_4(2)$ の関係を求めよ .
 (c) $F_3(2)$ を対角行列と $F_1(2)$ の積として表せ .
 (d) $\hat{F}(4)$ を加減算を表す行列, 複素乗算を表す対角行列, 及び, $F_1(2)$ を要素とする行列の積で表せ .
 (e) 上の結果に基づき, FFT のブロック図を求めよ . $F_1(2)$ についても同様な分解を行うこと .

2. 次の 4 サンプル DFT の FFT 化について以下の問いに答えよ .

$$F(4) = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^0 & w^2 \\ w^0 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}, \quad w = e^{-j2\pi/4} \quad (4.84)$$

- (a) 時間間引きにより, $F(4)$ を次のように変形し, $F_1(2)$, $F_2(2)$, $F_3(2)$, $F_4(2)$ を求めよ .

$$\hat{F}(4) = \begin{bmatrix} F_1(2) & F_2(2) \\ F_3(2) & F_4(2) \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

- (b) $F_1(2)$ と $F_3(2)$, 及び, $F_2(2)$ と $F_4(2)$ の関係を求めよ .

- (c) $F_2(2)$ を対角行列と $F_1(2)$ の積として表せ .
- (d) $\hat{F}(4)$ を加減算を表す行列, 複素乗算を表す対角行列, 及び, $F_1(2)$ を要素とする行列の積で表せ .
- (e) 上の結果に基づき, FFT のブロック図を求めよ . $F_1(2)$ についても同様な分解を行うこと .

3. 次の文章は離散フーリエ変換 (DFT) と高速フーリエ変換 (FFT) に関するものである。文中の (ア) ~ (ス) に該当する語句または式を下欄から選択し, 番号で答えよ。

「時間信号 $x(n)$ を複素信号とし, $x(n)$ の DFT を $X(k)$ とする。さらに, DFT のサンプル数を $N = 2^L$ とする。DFT で $X(k)$ を 1 サンプル計算するためには複素乗算が (ア) 回, 複素加算が (イ) 回必要である。従って, DFT で $X(k), k = 0 \sim N - 1$ を計算するためには複素乗算が (ウ) 回, 複素加算が (エ) 回必要である。一方, FFT の計算フローは (オ) 段で構成される。各段において複素乗算が (カ) 回, 複素加算 (減算) が (キ) 回行われる。従って, 全体としては複素乗算が (ク) 回, 複素加算 (減算) が (ケ) 回行われる。例えば, $N = 128, N = 1024$ の場合, $L = \log_2 N$ は (コ) (サ) となるから, FFT は DFT に比べて全体の計算量を約 (シ) % (ス) % に減らすことができる。」

< 選択肢 >

- (1) N , (2) $N - 1$, (3) $N/2$, (4) $\log_2 N$, (5) L , (6) N^2 , (7) $N(N - 1)$,
 (8) $(N/2)L = (N/2) \log_2 N$, (9) $NL = N \log_2 N$, (10) 7, (11) 8, (12)
 9, (13) 10, (14) 9.4, (15) 5.5, (16) 3.1, (17) 1.8, (18) 1。