

8

量子化誤差の解析と低減法

デジタルシステムでは、信号や乗数は有限長の2進数で表現されるから量子化誤差が発生する。信号における量子化誤差としては丸め誤差とオーバーフローがあり、出力における雑音や波形の歪みとなる。乗数における量子化誤差は周波数特性等の変動となって現れる。本章では、まず、確率過程の解析法について述べ、次に、内部信号における量子化誤差の解析を行うと同時に、出力雑音の低減法についても述べる。最後に、乗数の量子化による周波数特性の変動を解析する。

8.1 確率過程の解析

8.1.1 確率過程の性質

1. 確率変数：ある時刻における値は確定できない。統計的な性質のみが規定できる変数であり、統計量でしか議論できない。
2. 確率密度関数： $p(x)$ 、 $x =$ 確率変数

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (8.1)$$

全事象に対する確率は1である。

3. 期待値（平均値）

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (8.2)$$

4. 2乗平均（平均電力）

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx \quad (8.3)$$

5. 分散：直流分を除いた2乗平均

$$\sigma_x^2 = E[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx \quad (8.4)$$

6. 自己相関

$$\phi_x(n, m) = E[x(n)x(n-m)] \quad (8.5)$$

$$\phi_x(n, 0) = E[x^2(n)] \quad \text{2乗平均} \quad (8.6)$$

定常過程では,

$$\phi_x(m) = E[x(n)x(n-m)] \quad (8.7)$$

$$\phi_x(0) = E[x^2(n)] \quad \text{2乗平均} \quad (8.8)$$

7. 自己共分散

$$\gamma_x(n, m) = E[(x(n) - \bar{x})(x(n-m) - \bar{x})] \quad (8.9)$$

$$\gamma_x(n, 0) = \sigma_x^2 \quad \text{分散} \quad (8.10)$$

定常過程では,

$$\gamma_x(m) = E[(x(n) - \bar{x})(x(n-m) - \bar{x})] \quad (8.11)$$

$$\gamma_x(0) = \sigma_x^2 \quad \text{分散} \quad (8.12)$$

例題

8.1.2 確率過程の周波数解析

〔1〕 確率変数のフーリエ変換

確率変数はその絶対値和が有限ではないのでフーリエ変換はできない。また、周期性もないのでフーリエ級数に展開することもできない。しかし、その自己共分散は絶対値和が有限となるのでフーリエ変換できる。平均値が零の場合は、自己相関のフーリエ変換も可能である。

$x(n)$ が完全な不規則信号であれば

$$\gamma_x(m) = \begin{cases} \sigma_x^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

を満たす。また、完全な不規則信号でなくとも、量子化雑音等の自己共分散は、その時間差（Time Lag） m が大きいほど小さくなり、次の条件を満たす場合が多い。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(m)| < \infty \quad (8.14)$$

この場合は、 $\gamma_x(m)$ に対してフーリエ変換対が計算できる。

$$\Gamma_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_x(m) e^{-jm\omega T} \quad (8.15)$$

$$\gamma_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(e^{j\omega}) e^{jm\omega T} d\omega T \quad (8.16)$$

$E[x(n)] = 0$ の場合は、 $\gamma_x(m)$ の代わりに $\phi_x(m)$ を用いることができる。

$$\Phi_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_x(m) e^{-jm\omega T} \quad (8.17)$$

$$\phi_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(e^{j\omega}) e^{jm\omega T} d\omega T \quad (8.18)$$

〔2〕 自己共分散の z 変換

$x(n)$ が実数であるとする、

$$\gamma_x(m) = \gamma_x(-m) \quad (8.19)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Gamma_x(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} \gamma_x(m) z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_x(-m) z^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_x(m) z^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} \end{aligned} \quad (8.20)$$

上式の第1項は左側数列、第2項は右側数列である。右側数列の収束領域を $R_x < |z|$ とすると、左側数列の収束領域は $|z| < 1/R_x$ となり、 $\Gamma_x(z)$ の収束領

域は $R_x < |z| < 1/R_x$ となる。これは単位円を含む。さらに，

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x(z^{-1}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_x(m) z^m \\
 &= \sum_{m=-\infty}^0 \gamma_x(m) z^m + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_x(m) z^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_x(-m) z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_x(m) z^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_x(m) z^{-m} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_x(m) z^m
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

となるから，式 (8.20) と比較して，

$$\Gamma_x(z) = \Gamma_x(z^{-1}) \tag{8.22}$$

が成り立つ。

〔3〕 電力密度スペクトル

式 (8.22) より，フーリエ変換も $\Gamma_x(e^{j\omega}) = \Gamma_x(e^{-j\omega})$ を満たすから $\Gamma_x(e^{j\omega})$ は実数となる。これを，

$$P_x(\omega) = \Gamma_x(e^{j\omega}) \tag{8.23}$$

と表す。 $P_x(\omega)$ も

$$P_x(\omega) = P_x(-\omega) \quad \text{偶関数} \tag{8.24}$$

を満たす。式 (8.16) において， $m = 0$ とすることにより，

$$\gamma_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega T \tag{8.25}$$

を得る。このように， $P_x(\omega)$ を積分することにより，平均電力が得られることから， $P_x(\omega)$ を $x(n)$ の電力密度スペクトルあるいは単にスペクトルと呼ぶ。 $\bar{x} = 0$ ならば，

$$P_x(\omega) = \Gamma_x(e^{j\omega}) = \Phi_x(e^{j\omega}) \tag{8.26}$$

が成り立つ。本章では， $\bar{x} = 0$ を仮定して，自己共分散の代わりに自己相関を用いる場合もある。

8.1.3 確率変数に対する線形システムの応答

ここでは、確率変数、すなわち、統計量が線形シフト不変システムを伝達される過程について考える。概念図を図 8.1 に示す。線形シフト不変システムについては第 1 章で求めた以下の関係が成り立つ。畳み込み和は入力信号の種類に関係なく成り立つ関係である。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega nT} \quad (8.27)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega nT} d\omega T \quad (8.28)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (8.29)$$

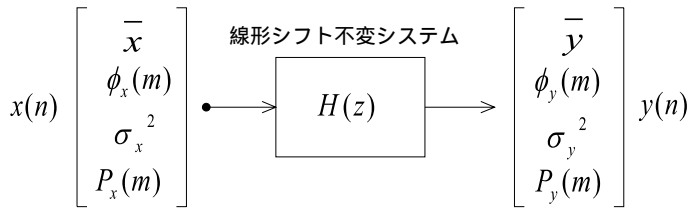


図 8.1 線形シフト不変システムにおける統計量の伝達

〔1〕 期待値

$$\begin{aligned} \bar{y} = E[y(n)] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E[x(n-k)] \\ &= \bar{x} \sum_{k=0}^{\infty} h(k) = \bar{x}H(e^{j0}) \end{aligned} \quad (8.30)$$

上式では、 $\bar{x} = E[x(n-k)]$ としている。期待値は直流成分に相当し、 $H(e^{j0})$ は直流における周波数特性であるから、期待値の伝達は直流成分の伝達に相当する。

〔2〕 自己相関

$$\phi_y(m) = E[y(n)y(n-m)]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \sum_{r=0}^{\infty} h(r)x(n-m-r) \right] \\
&= E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} h(k)x(n-k)h(r)x(n-m-r) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \sum_{r=0}^{\infty} h(r)E[x(n-k)x(n-m-r)] \tag{8.31}
\end{aligned}$$

上式において,

$$\phi_x(m-k+r) = E[x(n-k)x(n-m-r)] \tag{8.32}$$

とおけるから, $l = k - r$ とおいて,

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_x(m-l) \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-l) \tag{8.33}$$

となる。さらに,

$$\phi_h(l) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-l) \tag{8.34}$$

とすることにより, 次の畳み込み和が求まる。

$$\phi_y(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_h(l)\phi_x(m-l) \tag{8.35}$$

$\bar{x} = 0$ として, $\phi_x(m)$, $\phi_y(m)$ が z 変換可能であるとすると, 次の積の関係を
得る。

$$\Phi_y(z) = H(z)H(z^{-1})\Phi_x(z) \tag{8.36}$$

$\phi_h(l)$ の z 変換は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
Z[\phi_h(l)] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-l) \right] z^{-l} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)z^{k-l} \right] z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)[H(z^{-1})]z^{-k} = H(z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \\
&= H(z^{-1})H(z) \tag{8.37}
\end{aligned}$$

上の関係で、式 (8.34) の $\phi_h(l)$ は自己相関ではなく $h(n)$ 自身の畳み込み和であることに注意されたい。

〔3〕 電力密度スペクトル

自己相関がフーリエ変換可能であるとして、式 (8.36) において $z = e^{j\omega T}$ とおくことにより、

$$H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (8.38)$$

$$P_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 P_x(\omega) \quad (8.39)$$

この関係は、もし、 $y(n)$ と $x(n)$ がフーリエ変換可能であるとすると

$$|Y(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 |X(e^{j\omega})|^2 \quad (8.40)$$

に対応する。

〔4〕 分散

式 (8.25) より

$$\sigma_y^2 = \gamma_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_y(\omega) d\omega T \quad (8.41)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 P_x(\omega) d\omega T \quad (8.42)$$

これは、出力における平均電力に相当する。

〔5〕 $x(n)$ が白色雑音の場合

$$\bar{x} = 0 \quad (8.43)$$

$$\phi_x(m) = \begin{cases} \sigma_x^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (8.44)$$

$$\gamma_x(m) = \phi_x(m) \quad (8.45)$$

フーリエ変換は

$$P_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_x(m) e^{-j\omega m T} = \gamma_x(0) \quad (8.46)$$

であるから、 ω に対して一定値となる。その値は

$$\gamma_x(0) = \sigma_x^2 \quad (8.47)$$

より,

$$P_x(\omega) = \sigma_x^2 \quad \text{分散} \quad (8.48)$$

となる。出力における分散は式 (8.42) に $P_x(\omega) = \sigma_x^2$ を代入して, 次のように求まる。

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega T \right] \quad (8.49)$$

[] の部分は雑音が発達される過程で増幅される割合 (利得) を表している。

出力におけるスペクトルは式 (8.39) より,

$$P_y(\omega) = \sigma_x^2 |H(e^{j\omega})|^2 \quad (8.50)$$

となる。

8.2 量子化誤差の種類と分布

8.2.1 2進数の表現

ここでは, 固定小数点表示について説明する。

[1] 符号 + 絶対値

2進数は $sd.d \cdots d$ と表され, s が符号を表す。正のときは $s = 0$, 負のときは $s = 1$ である。 $d.d \cdots d$ が大きさを表す。

(例題)

小数点以上3ビット, 以下1ビットの2進数表現を考える。

$$\text{正数} \quad 3.5 = 011.1$$

$$\text{負数} \quad -3.5 = 111.1$$

$$\text{そのまま加算} \quad 3.5 + (-3.5) = 011.1 + 111.1 = 011.0 = 3.0$$

$$\text{対応する正数を減算} \quad 3.5 - (3.5) = 011.1 - 011.1 = 000.0 = 0.0$$

このように, 負数をそのまま加算できない。対応する正数を引き算する必要がある。デジタル回路では, 加算と減算で回路形式が異なるため, 符号によっ

て加算器と減算器を使い分ける必要がある。

〔2〕 2の補数

正数の表現は符号 + 絶対値と同じである。負数の表現は（表現したい最大値 $\times 2$ - 対応する正数）となる。

$$\text{負数の表現： } 1000.000 - Odd.ddd \quad (8.51)$$

（例題）

小数点以上3ビット，以下1ビットの2進数表現を考える。

$$3.5 = 011.1$$

$$-3.5 = 1000.0 - 011.1 = 100.1$$

これらを加算すると

$$3.5 + (-3.5) = 011.1 + 100.1 = 1000.0 \rightarrow 000.0 \quad (8.52)$$

となる。1000.0は小数点以上3ビット，以下1ビットの固定小数点では000.0と同じになる。すなわち，2の補数表現の場合は負数をそのまま加算することができ，ディジタル回路としても加算器のみを用いればよい。負数の2の補数表示を求める別法として，対応する正数のビットを反転し，最下位に1を加える方法もある。

10進数との対応関係を表8.1に示す。

8.2.2 量子化誤差の発生

〔1〕 量子化誤差の種類

システムの内部信号の量子化により，乗算器の出力を所定ビット数に制限するとき丸め誤差が発生し，また，加算器出力においてオーバーフローが発生する。これにより，出力に加法的な雑音や波形歪みが発生する。また，オーバーフローによってはシステムが不安定になる場合がある。一方，伝達関数を実数で設計し，実際の回路で乗算器の乗数を有限ビット数で表現する際に量子化誤差が発生する。これは，周波数特性や時間応答の変動となる。誤差の発生する

表 8.1 2進数表示と10進数表示の関係

2進数	符号-絶対値	2の補数
0.111	7/8	7/8
0.110	6/8	6/8
0.101	5/8	5/8
0.100	4/8	4/8
0.011	3/8	3/8
0.010	2/8	2/8
0.001	1/8	1/8
0.000	0	0
1.000	0	-1
1.001	-1/8	-7/8
1.010	-2/8	-6/8
1.011	-3/8	-5/8
1.100	-4/8	-4/8
1.101	-5/8	-3/8
1.110	-6/8	-2/8
1.111	-7/8	-1/8

様子を図 8.2 に示す。

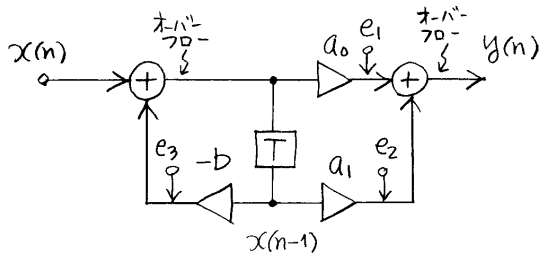


図 8.2 デジタル回路における量子化誤差の発生箇所

〔2〕 乗算器における丸め誤差

図 8.3, 8.4 に示すように, 内部信号 $x(n)$ を n ビット, 乗数 a を m ビットで表す。乗算結果 $y(n) = ax(n)$ は $n + m - 1$ ビットになる。これを再び n ビットに量子化し, $y_q(n)$ とする。乗算するたびにビット数を増やすことはできないので内部信号は常に所定のビット数 n に量子化される。FIR フィルタの直接構成の場合は, 乗算器の出力ではなく, 加算器にまとめた後で量子化を行うことができる。

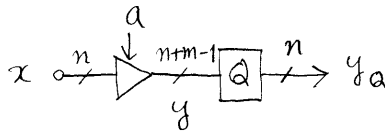


図 8.3 乗算器における丸め誤差の発生

(例題)

$$0.625 \times 0.75 = 0.46875 \quad 10 \text{ 進表示}$$

$$0.101 \times 0.110 = 0.01110 \rightarrow 0.011 (= 0.375) \text{ 切り捨てによる量子化}$$

$$\text{量子化誤差: } 0.46875 - 0.375 = 0.09375$$

〔3〕 加算器におけるオーバーフロー

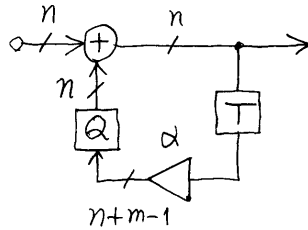


図 8.4 フィードバックにおけるビット数の設定

量子化の様子を図 8.5 に示す。

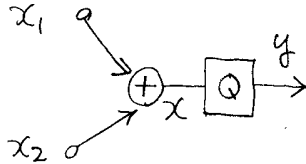


図 8.5 加算器におけるオーバーフローの発生

ここで、 $s.ddd$ の 2 の補数表示で考えてみる。

$$10 \text{ 進} / 2 \text{ 進} \quad 0.75/0.110$$

$$10 \text{ 進} / 2 \text{ 進} \quad 0.625/0.101$$

$$10 \text{ 進数で計算} \quad 0.75 + 0.625 = 1.375$$

$$2 \text{ 進数で計算} \quad 0.110 + 0.101 = 1.011 \rightarrow -0.625$$

$$\text{量子化誤差} \quad 1.375 - (-0.625) = 2.0 \quad (8.53)$$

この様子を図 8.6 に示す。のこぎり状のグラフは加算結果 x と量子化後の y の関係を表している。2 の補数表示 ($s.dd\dots d$) で表現できる範囲は $-1 \leq y < 1$ となる。正しい加算結果は 1.375 であるが、量子化により、 -0.625 に変化し、量子化誤差は -2.0 となる。この図からも分かるように 2 入力加算のオーバーフローによる誤差は常に ± 2 である。

〔4〕 量子化誤差の分布

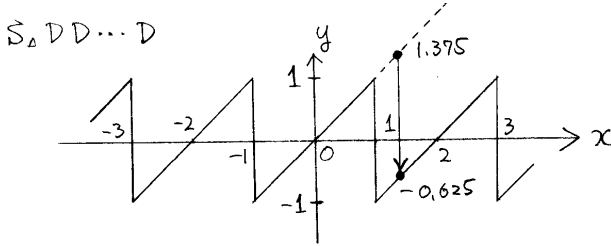


図 8.6 2の補数表示 ($s.dd\dots d$) におけるオーバーフローの様子

符号 + 絶対値表示における量子化の様子を図 8.7 に示す。量子化後に取りうる値を量子化レベル、量子化レベルの間隔を量子化ステップという。小数点以下のビット数を b とすると、量子化ステップは

$$\Delta = 2^{-b} \quad (8.54)$$

となる。例えば、 $b = 2$ の場合、 $0.00 \rightarrow 0, 0.01 \rightarrow 0.25, 0.10 \rightarrow 0.5, 0.11 \rightarrow 0.75$ より、 $\Delta = 0.25 = 2^{-2}$ となる。

切り捨て、切り上げ、四捨五入による量子化誤差の確率密度関数は図 8.8 のようになる。

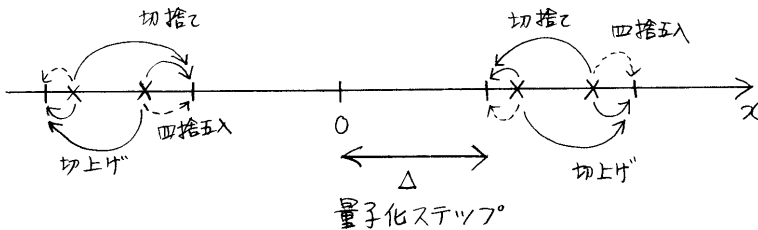


図 8.7 符号 + 絶対値表示における量子化の様子

平均値はいずれの場合も零である。分散と 2 乗平均は等しく、次のようになる。

$$\text{切り捨て, 切り上げ} \quad \sigma_e^2 = E[e^2] = \int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 \frac{1}{2\Delta} de = \frac{\Delta^2}{3} \quad (8.55)$$

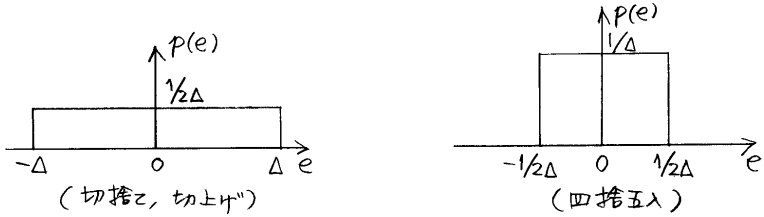


図 8.8 符号 + 絶対値表示における量子化誤差の確率密度関数

四捨五入
$$\sigma_e^2 = E[e^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} \quad (8.56)$$

次に、2の補数表示のときの、量子化の様子を図 8.9 に示す。また、量子化誤差の確率密度関数を図 8.10 に示す。これらの平均値、2乗平均、及び分散

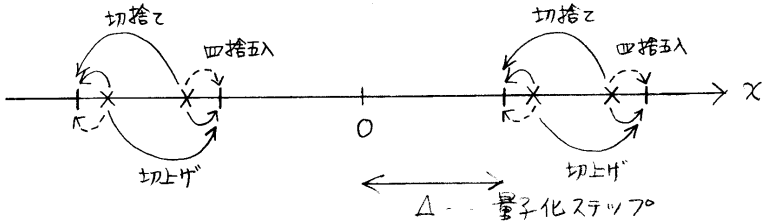


図 8.9 2の補数表示における量子化の様子

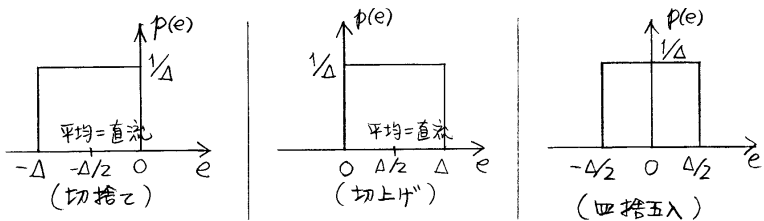


図 8.10 2の補数値表示における量子化誤差の確率密度関数

は次のようになる。

切り捨て

$$\bar{e} = E[e] = \int_{-\Delta}^0 e \frac{1}{\Delta} de = -\frac{\Delta}{2} \tag{8.57}$$

$$E[e^2] = \int_{-\Delta}^0 e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{3} \tag{8.58}$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta}^0 (e - \bar{e})^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} \tag{8.59}$$

切り上げ

$$\bar{e} = E[e] = \int_0^{\Delta} e \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta}{2} \tag{8.60}$$

$$E[e^2] = \int_0^{\Delta} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{3} \tag{8.61}$$

$$\sigma_e^2 = \int_0^{\Delta} (e - \bar{e})^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} \tag{8.62}$$

四捨五入

$$\bar{e} = E[e] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e \frac{1}{\Delta} de = 0 \tag{8.63}$$

$$E[e^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} \tag{8.64}$$

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (e - \bar{e})^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} \tag{8.65}$$

この結果を表 8.2 にまとめる。

表 8.2 2の補数表示における量子化誤差の統計量

統計量	切り捨て	切り上げ	四捨五入
平均	$-\Delta/2$	$\Delta/2$	0
2乗平均	$\Delta^2/3$	$\Delta^2/3$	$\Delta^2/12$
分散	$\Delta^2/12$	$\Delta^2/12$	$\Delta^2/12$

切り捨て，切り上げは $-\Delta/2, \Delta/2$ の直流分を含んでいる。直流分を除いた誤差の平均電力は全て $\Delta^2/12$ である。

$$\frac{\Delta^2}{3} - \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{12} \tag{8.66}$$

直流分は分離して考える場合が多い。その理由は

- ・ 除去することが容易である。また，補正も可能である。
- ・ 統計的な処理に便利である。

平均電力 = 分散

自己相関に対して雑音変換，フーリエ変換が可能となる。

8.3 内部信号の量子化による雑音

8.3.1 スケーリング

2の補数表示の場合は加算でオーバーフローが起こっても，最終的にオーバーフローしない場合は誤差は生じない。

(証明)

信号の2進数表示を

$$x_i, y_i = s.dd \cdots d \quad (8.67)$$

$$-1 < x_i, y_i < 1 \quad (8.68)$$

とする。オーバーフローに対しては次のように訂正される。

$$y_i > 1 \rightarrow Q[y_i] = y_i - 2 \quad (8.69)$$

$$y_i < -1 \rightarrow Q[y_i] = y_i + 2 \quad (8.70)$$

さらに，

$$-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 1 \quad (8.71)$$

であるとする。もし，

$$y_1 = x_1 + x_2 > 1 \quad (8.72)$$

ならば，次のように訂正される。

$$Q[y_1] = y_1 - 2 \quad (8.73)$$

$$-1 < Q[y_1] < 1 \quad (8.74)$$

次に， x_3 を加えると，式(8.71)より，

$$y_2 = Q[y_1] + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 - 2 < -1 \quad (8.75)$$

となり，ここでもオーバーフローするので，次のように訂正される。

$$Q[y_2] = y_2 + 2 = x_1 + x_2 - 2 + x_3 + 2 = x_1 + x_2 + x_3 \quad (8.76)$$

オーバーフローによる誤差が相殺されて最終的に正しい答えが得られている。
(証明終)

一方，途中で乗算が行われる場合は最終的に正しい答えは得られない。具体例を図 8.11 に示す。図中 (a) の場合は (イ) と (ロ) で 2 回オーバーフローが起

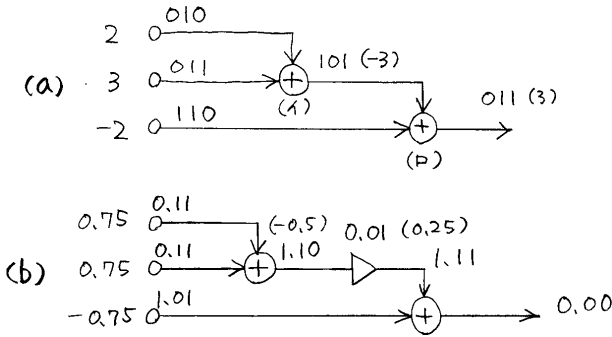


図 8.11 2 の補数表示の多段加算におけるオーバーフローの影響

こり，誤差が相殺されて正しい結果が得られている。一方，(b) の場合は，途中で乗算が入り誤差を生じており，この影響で最終的に正しい結果は得られない。

以上より，2 の補数表示において，オーバーフローを避けるためには乗算器の入力でオーバーフローが起こらないように信号をスケールアップする必要がある。

例題

図 8.12 に示す回路における信号のスケールアップを考えてみる。スケールアップのために乗算器 s を入力側に置き，それに伴うレベル調整のために出力側に乗算器 h_{out} を置く。伝達関数は次式で与えられる。

$$H(z) = h_0 \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} \quad (8.77)$$

$$h_0 = s h_{out} \quad (8.78)$$

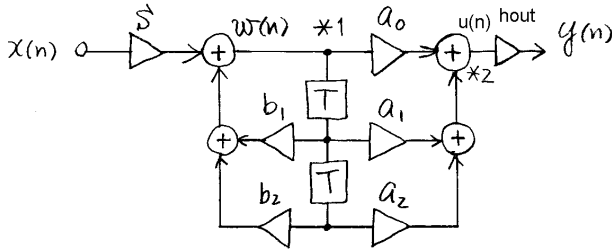


図 8.12 2次 IIR 回路 (2 の補数表示) における信号のスケーリング

乗算器の入力でオーバーフローが起こらないために、入力から乗算器入力までの伝達特性が 1 を超えないようにスケーリング乗数 s を設定する。乗算器入力は図中の *1 と *2 で示される点である。入力からこれらの点までの伝達関数を $F_1(z)$ 、 $F_2(z)$ とする。伝達関数は第 2 章で述べた内部変数 $w(n)$ を用いる方法により求める。時間領域の回路方程式を求め、 z 変換を行い、 $F_1(z) = W(z)/X(z)$ 、 $F_2(z) = U(z)/X(z)$ を求める。

$$w(n) = sx(n) + b_1w(n-1) + b_2w(n-2) \quad (8.79)$$

$$u(n) = a_0w(n) + a_1w(n-1) + a_2w(n-2) \quad (8.80)$$

$$W(z) = sX(z) + b_1z^{-1}W(z) + b_2z^{-2}W(z) \quad (8.81)$$

$$U(z) = a_0W(z) + a_1z^{-1}W(z) + a_2z^{-2}W(z) \quad (8.82)$$

$$F_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{s}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}} \quad (8.83)$$

$$F_2(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = s \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}} \quad (8.84)$$

スケーリング乗数 s に対する条件は次のようになる。

$$\max_{\omega} [|F_1(e^{j\omega})|, |F_2(e^{j\omega})|] \leq \alpha \quad 0.5 < \alpha < 1 \quad (8.85)$$

この条件は、入力信号 $x(n)$ として正弦波を考えたとき、 $w(n)$ と $u(n)$ も正弦波となるが、これらの振幅が $x(n)$ の振幅を超えない条件になっている。実際には、過渡応答も考慮する必要があるので α としては 0.5 ~ 0.7 が用いられる。

8.3.2 オーバーフローの補正法

オーバーフローがフィードバックされて回路動作が不安定に陥る場合がある。それを避けるために、オーバーフローを検知して、その誤差をある範囲に抑える方法が用いられる。補正後の値が図 8.13 の斜線の部分にあれば回路動作は安定である。

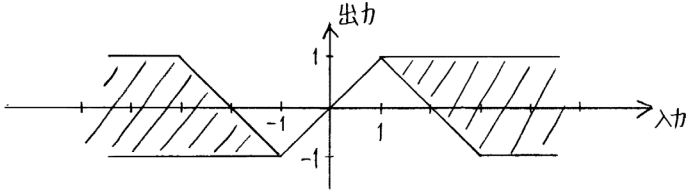


図 8.13 オーバーフローに対して回路が安定に動作する補正範囲

〔1〕 飽和形補正

入出力関係を図 8.14 に示す。加算結果が ± 1 を超えたときには ± 1 に固定する方法である。

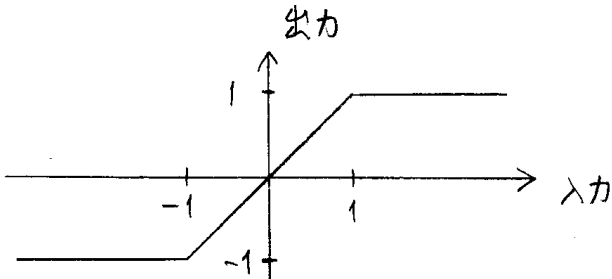


図 8.14 オーバーフローの飽和形補正

(例題)

信号を $ss.dd \cdots d$ と表す。オーバーフロー検出のために符号ビットを 2 ビット用いている。

01.101(1.625) 00.111(0.875)

10.011(-1.625) 11.000(-1)

〔2〕 三角形補正

入出力関係を図 8.15 に示す。補正の具体的な処理は次のようになる。

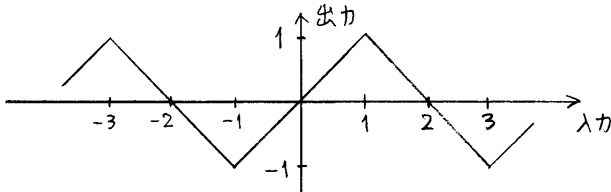


図 8.15 オーバーフローの三角形補正

$ss = 11$ or 00 : オーバーフローなし

$ss = 01$ or 10 : オーバーフローあり

上位の符号ビットを下位に拡張し、大きさを表すビットを全て反転する。

(例題)

01.101(1.625) 00.010(0.25)

10.110(-1.25) 11.001(-0.875)

〔3〕 符号ビット拡張補正

上記 2 通りの方法の中間的な方法として、符号ビットのみを拡張する方法がある。具体例は次のようになる。

(例題)

01.110(1.75) 00.110(0.75)

10.011(-1.625) 11.011(-0.625)

8.4 デジタルフィルタの出力雑音の解析

8.1 節で述べた方法に基づいて具体的な回路における雑音解析を行う。

8.4.1 量子化誤差の伝達

乗算による丸め誤差は乗算器の出力に加算される。量子化誤差の発生と伝達

過程は図 8.16 のように表される。

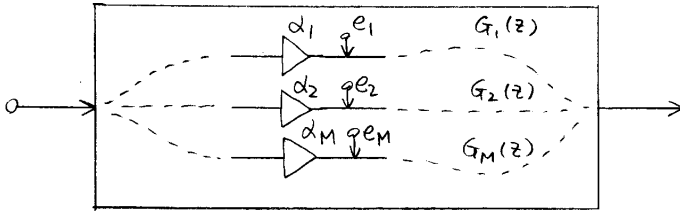


図 8.16 乗算による量子化誤差の発生と伝達の概念図

乗算器 α_i の出力に量子化誤差 $e_i(n)$ が加算される。そこから出力までの伝達関数を $G_i(z)$ とする。また、 $e_i(n)$ を白色雑音とする。入力信号が音声等の場合はこの条件が成り立つ。 $e_i(n)$ の分散を σ^2 とし、小数点以下のビット数を b とする。

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (8.86)$$

$$\Delta = 2^{-b}$$

量子化は四捨五入で行うか、または、切り捨て、切り上げの場合は直流分を除いて考える。 $e_i(n)$ による出力雑音のスペクトル $P_i(\omega)$ と平均電力 σ_i^2 は式 (8.50), (8.49) より次のようになる。

$$P_i(\omega) = \sigma^2 |G_i(e^{j\omega})|^2 \quad (8.88)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_i(e^{j\omega})|^2 d\omega T \quad (8.89)$$

雑音源は互いに独立であると見なせるから、 $e_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, M$ に対する出力のスペクトル $P_{out}(\omega)$ 及び平均電力 σ_{out}^2 は各々に対する値の和となる[†]。

$$\begin{aligned} P_{out}(\omega) &= \sum_{i=1}^M P_i(\omega) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^M |G_i(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (8.90)$$

[†] 附録 8.6 参照。

$$\begin{aligned}\sigma_{out}^2 &= \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{i=1}^M \int_{-\pi}^{\pi} |G_i(e^{j\omega})|^2 d\omega T\end{aligned}\quad (8.91)$$

次に,

$$N_R = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{out}^2}{\sigma^2} \quad [dB] \quad (8.92)$$

とすると, $N_R = 6[dB]$ が 1 ビット分の量子化誤差に相当する。また,

$$m = \frac{N_R}{6} \quad (8.93)$$

とすると, 出力において m ビット分の量子化誤差が生じていることになる。

(例題) 信号に対するビット数配分

まず, ダイナミックレンジを考える。信号の大きさの最大値を 1 としたとき, 大きさが 0.01 までの信号を扱うものとする。振幅で 100 倍のレンジ, デシベル表示で 40dB のレンジである。これを表現するために 7 ビット ($2^7 = 128$) 必要である。次に, 信号対雑音比 (SNR) を考える。最小レベルの信号に対して雑音を 1/100 に抑えるものとする。すなわち, SNR として 40dB 確保する。6dB/1bit であるから, 7 ビット必要である。最後に, 出力における量子化雑音を考える。もし, 式 (8.92) の N_R が 35dB であるとすると, これは約 6 ビットに相当する。すなわち, 下位の 6 ビットが量子化雑音に埋もれることになる。

以上より, ダイナミックレンジ (7bits)+SNR(7bits)+量子化雑音 (6bits)=合計 (20bits) 必要となる。この様子を図 8.17 に示す。

MSB			LSB
ダイナミックレンジ	信号成分	量子化誤差による 雑音成分	
7 ビット : 128倍分	7 ビット : SNR=42dB	6 ビット : NR=36dB分	

図 8.17 デジタル信号に対するビット数配分の例

8.4.2 デジタルフィルタにおける出力雑音

〔1〕 2次 IIR フィルタ

回路図を図 8.18 に示す。

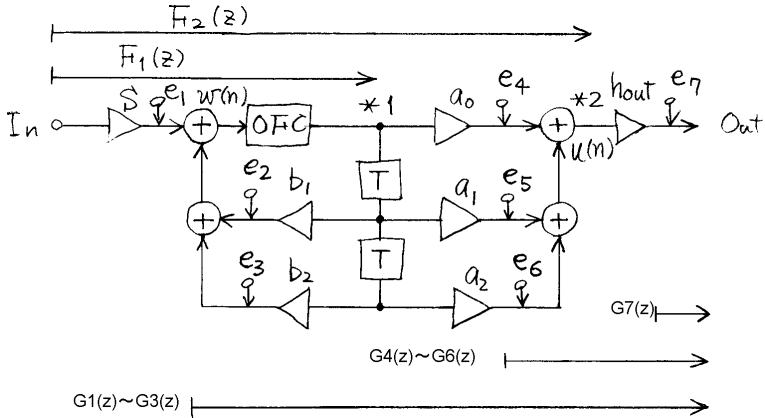


図 8.18 2次 IIR フィルタの回路構成 - 量子化誤差の解析

スケーリング及び量子化誤差に対する伝達関数も示されている。OFC はオーバーフロー補正を行うブロックである。スケーリング乗数の計算方法については 8.3.1 節で述べたのでここでは省略する。各雑音源から出力までの伝達関数 $G_i(z)$ は次のようになる。

$G_1(z), G_2(z), G_3(z)$: $e_1(n), e_2(n), e_3(n)$ から出力まで

$$w(n) = e_i(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.94)$$

$$y(n) = h_{out}[a_0 w(n) + a_1 w(n-1) + a_2 w(n-2)] \quad (8.95)$$

$$G_i(z) = \frac{Y(z)}{E_i(z)} = h_{out} \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} \quad (8.96)$$

$G_4(z), G_5(z), G_6(z)$: $e_4(n), e_5(n), e_6(n)$ から出力まで

$$y(n) = h_{out} e_i(n), \quad i = 4, 5, 6 \quad (8.97)$$

$$G_i(z) = h_{out} \quad (8.98)$$

$G_7(z)$: $e_7(n)$ から出力まで

$$y(n) = e_7(n) \quad (8.99)$$

$$G_7(z) = 1 \quad (8.100)$$

さらに,

$$N(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \quad (8.101)$$

$$D(z) = 1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} \quad (8.102)$$

とおく。出力雑音のスペクトルは次のように表される。

$$\begin{aligned} P_{out}(\omega) &= \sigma^2 \sum_{i=1}^7 |G_i(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma^2 \left[3 \left| h_{out} \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} \right|^2 + 3h_{out}^2 + 1 \right] \end{aligned} \quad (8.103)$$

ここで, $H(z)$ の振幅特性が図 8.19 で与えられるとする。スケーリング乗数に

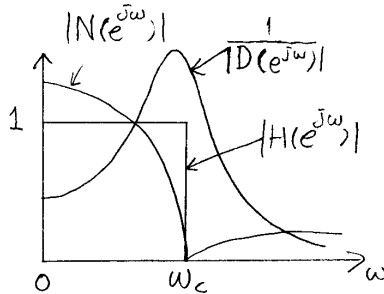


図 8.19 2次 IIR フィルタの振幅特性の例

対する条件は

$$s^{-1} > \max_{\omega} [1/|D(e^{j\omega})|, |N(e^{j\omega})/D(e^{j\omega})|] \quad (8.104)$$

であるから, $1/|D(e^{j\omega})|$ で決まる。この特性を用いて出力雑音の分散を計算する。

$$\sigma_{out}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{out}(\omega) d\omega T$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3s^{-2} (|H(e^{j\omega})|^2 + h_0^2) \\
&= 3\sigma^2 s^{-2} \left(\frac{2\omega_c T}{2\pi} + h_0^2 \right) \\
&= 3\sigma^2 \left(\frac{2\omega_c T}{2\pi} + h_0^2 \right) \max_{\omega} \left| \frac{1}{D(e^{j\omega})} \right|^2 \tag{8.105}
\end{aligned}$$

これより，出力の平均雑音電力を決める要因として $\max_{\omega} |1/D(e^{j\omega})|$ の影響が大きいことが分かる。

〔2〕 FIR フィルタの直接構成

雑音源からフィルタ出力までの伝達関数は1であるから，フィルタ次数を $N-1$ とすると，

$$P_{out}(\omega) = N\sigma^2 \tag{8.106}$$

$$\sigma_{out}^2 = N\sigma^2 \tag{8.107}$$

量子化を乗算器の後ではなく，加算後の出力で行うこともできる。この場合は， $P_{out}(\omega) = \sigma_{out}^2 = \sigma^2$ となり，出力雑音が小さく抑えられる。

8.4.3 出力雑音の低減

IIR フィルタの2次縦続構成では，零点と極の組み合わせ，及び2次回路の並べ順により出力雑音が大きく左右される。従って，これらを最適化する必要がある。

8.5 演習問題

- 自己相関が次式で与えられる雑音 $x(n)$ 及び $x(n)$ を $H(z)$ を伝達関数とする回路に入力して得られる出力信号 $y(n)$ に関して以下の問に答えよ。但し， $E[x(n)] = 0$ とする。

$$\phi(-1) = \phi(1) = 0.5, \phi(0) = 1 \tag{8.108}$$

$$\phi(m) = 0, m \neq -1, 0, 1 \tag{8.109}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_s/4 \\ 0, & |f| > f_s/4 \end{cases} \quad (8.110)$$

- (a) $x(n)$ の分散 σ_x^2 を求めよ .
- (b) $x(n)$ の電力密度スペクトル $P_x(\omega)$ を求め , $f = 0 \sim f_s$ の範囲で
図示せよ .
- (c) $y(n)$ の平均 \bar{y} を求めよ .
- (d) $y(n)$ の電力密度スペクトル $P_y(\omega)$ を求め , $f = 0 \sim f_s$ の範囲で
図示せよ .
- (e) $y(n)$ の分散 σ_y^2 を求めよ .
- (f) 次式で与えられる $x(n)$ と $y(n)$ の分散比を求めよ .

$$\text{分散比} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} [\text{dB}] \quad (8.111)$$

2. $x(n)$ を分散が $\sigma_x^2 = 1$ である白色雑音とする . $x(n)$ を伝達関数が $H(z)$ である回路に通したときの出力信号を $y(n)$ とする . 以下の問に答えよ .

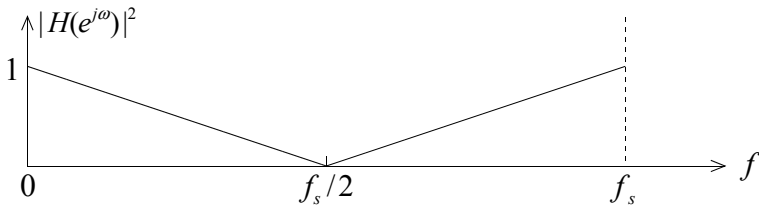


図 8.20 $H(z)$ の振幅特性 (2 乗)

- (a) $x(n)$ の電力密度スペクトル $P_x(\omega)$ を求め , $f = 0 \sim f_s$ の範囲で
図示せよ .
- (b) $y(n)$ の平均 \bar{y} を求めよ .
- (c) $y(n)$ の電力密度スペクトル $P_y(\omega)$ を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示
せよ .
- (d) $y(n)$ の分散 σ_y^2 を求めよ .
- (e) 次式で与えられる $x(n)$ と $y(n)$ の分散比を求めよ .

$$\text{分散比} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} [\text{dB}] \quad (8.112)$$

3. $H(z)$ を伝達関数とする回路の入力信号を $u(n) = x(n) + v(n)$ とし, 出力信号を $y(n) = y_x(n) + y_v(n)$ とする. $x(n)$ は以下に示す正弦波の信号, $v(n)$ は分散が $\sigma_v^2 = 1$ である白色雑音, $y_x(n)$ は $x(n)$ に対する出力信号, $y_v(n)$ は $v(n)$ に対する出力信号とする. 以下の問に答えよ.

$$x(n) = \cos(\omega_1 nT), \omega_1 = 2\pi f_1, f_1 = f_s/8 \quad (8.113)$$

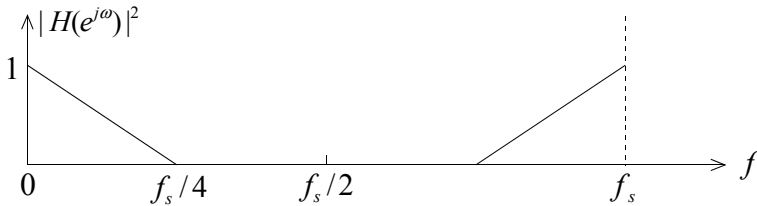


図 8.21 $H(z)$ の振幅特性 (2乗)

- $x(n)$ の周波数成分 (フーリエ級数の係数) を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せ
- $x(n)$ の平均電力 P_x を求めよ.
- $v(n)$ の電力密度スペクトル $P_v(\omega)$ を求め, $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_x(n)$ を求めよ. 但し, $H(e^{j\omega})$ の位相は零とする.
- $y_x(n)$ の平均電力 P_{y_x} を求めよ.
- $y_v(n)$ の電力密度スペクトル $P_{y_v}(\omega)$ を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_v(n)$ の分散 $\sigma_{y_v}^2$ を求めよ.
- 次式で与えられる入力における信号対雑音比 SNR_{in} と出力における SNR_{out} を求めよ. また, この回路を通すことにより SNR は何 dB 改善されたか.

$$SNR_{in} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{\sigma_v^2} [dB] \quad (8.114)$$

$$SNR_{out} = 10 \log_{10} \frac{P_{y_x}}{\sigma_{y_v}^2} [dB] \quad (8.115)$$

4. 次式で与えられる $H(z)$ を伝達関数とする回路の入力信号を $u(n) = x(n) + v(n)$ とし, 出力信号を $y(n) = y_x(n) + y_v(n)$ とする. $x(n)$ は次式で与えられる信号, $v(n)$ は分散が $\sigma_v^2 = 1$ である白色雑音, $y_x(n)$ は $x(n)$ に対する出力信号, $y_v(n)$ は $v(n)$ に対する出力信号とする. 以下の問に答えよ.

$$x(n) = \cos(\omega_1 nT) + \cos(\omega_2 nT) \quad (8.116)$$

$$\omega_i = 2\pi f_i, f_1 = f_s/8, f_2 = f_s/4$$

$$H(z) = 0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-2} \quad (8.117)$$

- $x(n)$ の周波数成分 (フーリエ級数の係数) を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せ
- $x(n)$ の平均電力 P_x を求めよ.
- $v(n)$ の電力密度スペクトル $P_v(\omega)$ を求め, $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_x(n)$ を求めよ.
- $y_x(n)$ の平均電力 P_{y_x} を求めよ.
- $y_v(n)$ の電力密度スペクトル $P_{y_v}(\omega)$ を求め, $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_v(n)$ の分散 $\sigma_{y_v}^2$ を求めよ.
- 次式で与えられる入力における信号対雑音比 SNR_{in} と出力における SNR_{out} を求めよ. また, この回路を通すことにより SNR は何 dB 改善されたか.

$$SNR_{in} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{\sigma_v^2} [dB] \quad (8.118)$$

$$SNR_{out} = 10 \log_{10} \frac{P_{y_x}}{\sigma_{y_v}^2} [dB] \quad (8.119)$$

5. $H(z)$ を伝達関数とする回路の入力信号を $u(n) = x(n) + v(n)$ とし, 出力信号を $y(n) = y_x(n) + y_v(n)$ とする. $y_x(n)$ は $x(n)$ に対する出力信号, $y_v(n)$ は $v(n)$ に対する出力信号とする. $x(n)$, $v(n)$ の電力密度スペクトル $P_x(\omega)$, $P_v(\omega)$ 及び回路 $H(z)$ の振幅特性が下図で与えられるとき, 以下の問に答えよ.

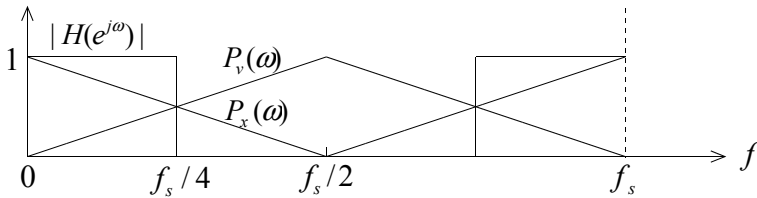


図 8.22 $x(n)$, $v(n)$ の電力密度スペクトル $P_x(\omega)$, $P_v(\omega)$ 及び回路 $H(z)$ の振幅特性.

- $x(n)$ の分散 σ_x^2 を求めよ.
- $v(n)$ の分散 σ_v^2 を求めよ.
- $y_x(n)$ の電力密度スペクトル $P_{y_x}(\omega)$ を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_v(n)$ の電力密度スペクトル $P_{y_v}(\omega)$ を $f = 0 \sim f_s$ の範囲で図示せよ.
- $y_x(n)$ の分散 $\sigma_{y_x}^2$ を求めよ.
- $y_v(n)$ の分散 $\sigma_{y_v}^2$ を求めよ.
- 次式で与えられる入力における信号対雑音比 SNR_{in} と出力における SNR_{out} を求めよ. また, この回路を通すことにより SNR は何 dB 改善されたか.

$$SNR_{in} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_v^2} [dB] \quad (8.120)$$

$$SNR_{out} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{y_x}^2}{\sigma_{y_v}^2} [dB] \quad (8.121)$$

8.6 附録

8.6.1 サイコロを用いた確率過程の説明

〔1〕 確率変数

サイコロの目が確率変数となる。この場合は、1~6の6通りしかない。 n 回目に出るサイコロの目を $x(n)$ とする。

〔2〕 確率密度関数

$x(n)$ が6通りのうちの一つの値をとる確率は $1/6$ である。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = \text{サイコロの目} \\ 0, & x \neq \text{サイコロの目} \end{cases} \quad (8.122)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} = 1 \quad (8.123)$$

〔3〕 一様分布

x が分布する範囲で確率が全て等しい。サイコロの目の確率を図 8.23 に示す。



図 8.23 サイコロの目が出る確率分布

〔4〕 白色雑音

雑音のサンプル間が無相関である。サイコロの場合、1個のサイコロを n 回振ってこれまでの全ての目 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ が分かっているとしても、 $n+1$ 回目に出る目 $x(n+1)$ を予測することはできない。すなわち、 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ と $x(n+1)$ は無相関である。このような時系列のスペクトルは周波数に対して一定値となり、白色雑音と呼ばれる。

〔5〕 複数雑音源の独立性

3個のサイコロ A,B,C を振る場合を考える。サイコロ A と B を振って出た目が分かっているとき、次に振るサイコロ C の出る目を予測することできない。サイコロ A,B,C の目を $x_A(n), x_B(n), x_C(n)$ とするとき、これらは互いに独立である。

〔6〕 平均値

$$m_x = \sum_{x=1}^6 p(x)x = 3.5 \quad (8.124)$$

〔7〕 二乗平均

$$m_{x^2} = \sum_{x=-2.5}^{2.5} p(x)x^2 = \frac{91}{6} \quad (8.125)$$

〔8〕 分散

$$\sigma_x^2 = \sum_{x=1}^6 p(x)(x - m_x)^2 = \frac{17.5}{6} \quad (8.126)$$

〔9〕 自己相関

$$\phi_x(m) = E[x(n)x(n-m)] = \begin{cases} \frac{91}{6}, & m = 0 \\ \frac{91^2}{36}, & m \neq 0 \end{cases} \quad (8.127)$$

〔10〕 自己共分散

$$\gamma_x(m) = E[(x(n) - m_x)(x(n-m) - m_x)] = \begin{cases} \frac{17.5}{6}, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (8.128)$$

8.6.2 自己相関とフーリエ変換

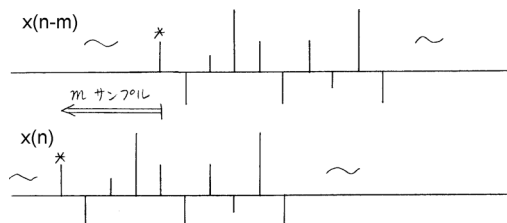
実信号 $x(n)$ の自己相関は次式で定義される。

$$\phi_x(m) = E[x(n)x(n-m)] \quad (8.129)$$

$x(n)$ と $x(n-m)$ の関係を図 8.24 に示す。

白色雑音の場合は、 $x(n)$ と $x(n-m), m \neq 0$ は無相関である。

$$\phi_x(m) = \begin{cases} \sigma_x^2, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (8.130)$$

図 8.24 $x(n)$ と $x(n-m)$ の位置関係

$$\Phi_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_x(m) e^{-jm\omega} = \sigma_x^2 \quad (8.131)$$

このように、白色雑音のスペクトルは一定値 σ_x^2 となる。

一般には、近傍のサンプル間には相関がある場合が多い。しかし、時間差 m が大きくなるにしたがい相関は弱くなる。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_x(m) \rightarrow 0 \quad (8.132)$$

この様子を図 8.25 に示す。

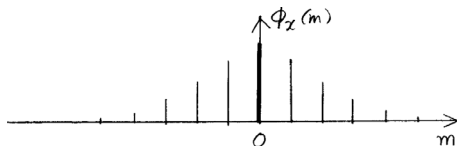


図 8.25 サンプル間の相関性が低い信号の自己相関

このような自己相関は

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\phi_x(m)| < \infty \quad (8.133)$$

を満たすことから、 $\phi(m)$ のフーリエ変換は可能である。

一方、 $x(n)$ と $x(n-m)$ の相関が高い波形では、その自己相関は上式を満足せず、フーリエ変換はできない。周期波形の例を以下に示す。連続時間信号として

$$x(t) = \sin(2\pi t/T_0) \quad (8.134)$$

とする。自己相関を時間平均で計算する。

$$\begin{aligned} \phi_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(2\pi t/T_0) \sin(2\pi(t-\tau)/T_0) dt \\ &= \frac{1}{2T_0} \int_0^{T_0} [\cos(2\pi\tau/T_0) - \cos(2\pi(2t-\tau)/T_0)] dt \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi\tau/T_0) \end{aligned} \quad (8.135)$$

このように $\phi_x(\tau)$ は τ 軸上で周期関数となり、式 (8.133) を満たさない。

8.6.3 信号和の電力

〔1〕 無相関な信号

$x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 、 $x_3(n)$ を互いに無相関な信号として、その和

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) \quad (8.136)$$

の平均電力を計算する。

$$\begin{aligned} E[x^2(n)] &= E[(x_1(n) + x_2(n) + x_3(n))^2] \\ &= E[x_1^2(n)] + E[x_2^2(n)] + E[x_3^2(n)] + 2\{E[x_1(n)x_2(n)] \\ &\quad + E[x_2(n)x_3(n)] + E[x_3(n)x_1(n)]\} \end{aligned} \quad (8.137)$$

$x_i(n)$ と $x_j(n)$, $i \neq j$ が互いに無相関であるから、

$$E[x_i(n)x_j(n)] = 0, \quad i \neq j \quad (8.138)$$

が成り立つ。その結果、

$$E[x^2(n)] = E[x_1^2(n)] + E[x_2^2(n)] + E[x_3^2(n)] \quad (8.139)$$

となる。すなわち、「無相関な信号の和の平均電力は各信号の平均電力の和に等しい」。

〔2〕 正弦波形

正弦波形として

$$x_i(n) = a_i \sin(\omega_i nT + \psi_i) \quad (8.140)$$

を考える。単一正弦波形の平均電力は

$$E[x_i(n)] = \frac{a_i^2}{2} \quad (8.141)$$

である。これは、連続時間信号を1周期に亘って平均することにより求まる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_i^2 \sin^2 \theta = \frac{a_i^2}{2} \quad (8.142)$$

次に、正弦波形の和の平均電力を求める。

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) \quad (8.143)$$

$x(n)$ の平均電力は式 (8.137) と同じになる。正弦波形の場合も

$$E[x_i(n)x_j(n)] = E[a_i a_j \sin(\omega_i nT + \psi_i) \sin(\omega_j nT + \psi_j)] = 0, i \neq j \quad (8.144)$$

となるため、式 (8.139) が成り立つ。

〔3〕 相関のある信号

相関のある信号では、式 (8.138) が成り立たないため、信号の和の平均電力は各信号の平均電力の和にならない。例を以下に示す。 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ は互いに無相関であるとし、次のような信号を考える。

$$x_a(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (8.145)$$

$$x_b(n) = x_2(n) \quad (8.146)$$

$$x(n) = x_a(n) + x_b(n) = x_1(n) + 2x_2(n) \quad (8.147)$$

$x_a(n)$ と $x_b(n)$ は $x_2(n)$ を共通に含むため相関性がある。各信号の平均電力は次のようになる。

$$E[x_a^2(n)] = E[x_1^2(n)] + E[x_2^2(n)] \quad (8.148)$$

$$E[x_b^2(n)] = E[x_2^2(n)] \quad (8.149)$$

$$E[x^2(n)] = E[x_1^2(n)] + 4E[x_2^2(n)] \quad (8.150)$$

以上より、

$$E[x^2(n)] = E[x_a^2(n)] + E[x_b^2(n)] \quad (8.151)$$

が成り立たないことが分かる。

8.6.4 浮動小数点演算における量子化誤差