情報システム工学科 平成17年度後期 『自主課題研究』

研究テーマ：Kolmogorov-Sinaiの定理

名列番号:030 佐々木仁士

1. まえがき

そもそも、エントロピーとは熱力学の研究を進めるために Boltzmann によって導入された概念である。その後、Shannon によって情報理論の分野において、情報量を表すとして利用された。さらに、エルゴード理論の分野において、Kolmogorov や Sinai によってエントロピーは数学的に定式化された。

2. 研究課題

保測変換に関するエントロピーについて重要な定理である、Kolmogorov-Sinai の定理について研究する。

3. 研究方法

まず、ゼミナール形式で先生から与えられたテキストを輪講して理論について理解し、その後その理論について研究を行う。

4. 結果と考察

Kolmogorov-Sinai の定理というものは、 α が T に関する生成元ならば、

$$h(T) = h(\alpha, T)$$

が成り立つ。
というものである。

Kolmogorov-Sinai の定理を理解、証明するためには、様々な定義や補題が必要になった。定義が必要なものとしては、直積測度 μ 、 σ -algebra、可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 、確率空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 、分割 α 、保測変換 T 、ルベーグ空間、様々なエントロピー、生成元などがあつた。また、必要な補題は

- 1) 任意の可算可測分割 α と β に対して

$$h(\beta, T) \leq h(\alpha, T) + H(\beta | \alpha)$$

- 2) $H(\alpha | \mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \alpha \overset{\circ}{\subset} \mathcal{F} (\alpha \overset{\circ}{\subset} \mathcal{F} \rightarrow \forall A \in \alpha, \exists F \in \mathcal{F} : \mu(A \Delta F) = 0)$

- 3) $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots$ を $\mathcal{B}$ の sub- σ -algebra の列とし、 $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ とする。 α を有限可測分割とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(\alpha | \mathcal{B}_n) = H(\alpha | \mathcal{B}_\infty)$$

- 4) $h(\bigvee_{k=m}^n T^{-k} \alpha, T) = h(\alpha, T)$
などである。

また、Kolmogorov-Sinai の定理に関連する、Krieger の生成元定理についても研究を行おうとしたが、証明することができなかった。Krieger の生成元定理とは、

T が Lebesgue 空間上のエルゴード的保測変換で、 $h(T) < \infty$ を満たすとする。このとき T は有限生成元を有する。

というものである。Krieger の生成元定理から T が有限生成元を有することが分かれば、Kolmogorov-Sinai の定理を適用できることが分かった。

だが、Kolmogorov-Sinai の定理がどのようなものに利用可能かについて調査することができなかった。

5. まとめと感想

一応自主課題研究は終わったものの、上のところでも書いたようにやり残した問題が沢山あつた。今回の自主課題研究は、あるシステムを構築するために自分でプログラムを書いたり、設計したりというようなものではなく、文献を調査や研究するというものだったので、完成や成功というものがはっきりと見えなくてとまどつた。