情報システム工学科平成１７年度後期「自主課題研究」
研究テーマ：測度論的エントロピー

名列番号３４ 高田勇

まえがき

そもそもエントロピーとは熱力学において考えられた概念であり、シャノンによって始められた数学的な研究により現在は情報数理の研究にも広く利用されている。そのエントロピーの測度論的な概念について研究する。

研究目的

Sinai によって発見されたエントロピーに関する公式について考え、それを簡略化した Berg による証明の概略を説明する。２次元トーラス上での図を使うことでより深く理解する。

研究方法

ゼミナール形式でエントロピーに関する数学書を輪講し、理論研究を行う。その後、各グループ内で内容を分担し LaTeX でレポートを作成し研究発表を行う。

結果と考察

変換 T に関する式

$$h(T) = \sum_{|\lambda_i|>1} \log_2 |\lambda_i|$$

から、n=2 のときの概略を考える。Kronecker-Weyl の定理によりトーラスへの射影は密である。

よってすべての E について $\frac{1}{c} \leq \lambda_1^k \mu(E) \leq c$ が成り立つことより

$$H(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^k\alpha) \quad = \quad -\sum_E \mu(E) \log \delta_E + \log_2 \lambda_1 \sum_E \mu(E)$$

$$|H(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^k\alpha) - k \log \lambda_1| \leq |\log_2 c|$$

$k \to \infty$ のとき $\frac{1}{N+1}|\log c| \to 0$ であるから

$$h(\alpha, T) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} H(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^k\alpha) = \log_2 \lambda_1$$

固有空間 V_1 と V_2 を十分長く取ることにより有限分割の非減少列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$ が

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathrel{\hat{=}} \mathcal{B}$$ を満たすようにできる。

このとき $h(T) = \lim_{k\to\infty} h(\alpha, T)$ が成り立つので

$$h(T) = \log_2 \lambda_1$$

が成り立つ。

つまり変換 T のエントロピーは固有値 λ のみを変数とした関数であることがわかる。

まとめと今後の課題

最低限の内容は理解し研究することができた。エントロピーを求める際に Kronecker-Weyl の定理を利用したがこの定理がどのような性質をもつのか、なぜ成り立っているのかについては時間がなかったために考えなかった。

また、求められた定理が実際にどのような場面で利用されているのかについて調べればさらによい研究になったと思う。