

自主課題研究
数式処理ソフトを用いた数学探求

担当 佐藤卓司

テーマ
月に向かうロケットの軌道について

工学部 情報システム学科 3年

名列 065

氏名 森裕介

目的

宇宙はとても広く、さまざまな惑星や衛星があります。地球には月という衛星がまわっています。人類は月を研究するためにロケットを使って月まで到達します。その地球から飛び立ち、月に到着するまでのロケットの軌道をマスマティカを用いて表示し、宇宙での運動を目でたしかめたいです。

1 位置関係

まず太陽、地球、月、ロケットの位置関係を定義します。わかりやすくするために太陽、地球、月は同一平面上。地球と月の公転は円とします。太陽を原点とし、地球は公転半径 R 、公転角速度 q とすると地球の座標は

$$\{R \cdot \cos[q \cdot t], R \cdot \sin[q \cdot t]\}$$

とあらわせます。同様に月の公転半径 r 、公転角速度 w とすると月の座標は

$$\{R \cdot \cos[q \cdot t] + r \cdot \cos[w \cdot t], R \cdot \sin[q \cdot t] + r \cdot \sin[w \cdot t]\}$$

とあらわされます。そして、求めるロケットの座標を

$$\{x[t], y[t]\}$$

とします。上のことをマスマティカで定義します。

月の公転半径;

$$r = 3.844 \cdot 10^8;$$

地球の公転半径;

$$R = 1.496 \cdot 10^{11};$$

月の公転角速度;

$$w = 2.649 \cdot 10^{-6};$$

地球の公転角速度;

$$q = 1.992 \cdot 10^{-7};$$

地球の位置;

$$\text{earth} = \{R \cdot \cos[q \cdot t], R \cdot \sin[q \cdot t]\};$$

月の位置;

$$\text{moon} = \{R \cdot \cos[q \cdot t] + r \cdot \cos[w \cdot t], R \cdot \sin[q \cdot t] + r \cdot \sin[w \cdot t]\};$$

ロケットの位置;

$$\text{rocket} = \{x[t], y[t]\};$$

2 ロケットにかかる力

次にロケットにかかる力を考えます。ロケットにかかる力は太陽の引力、地球の引力、月の引力の3つです。万有引力を G とすると、引力の式は

$$F = \frac{G * \text{物体の質量} * \text{物体の質量}}{\text{距離}^2} * \text{方向の単位ベクトル}$$

であらわされるので、まず太陽の質量、地球の質量、月の質量、ロケットの質量をそれぞれ m_s , m_e , m_m , m_r と定義します。

万有引力定数;

$$G = 6.672 * 10^{-11};$$

太陽の質量;

$$m_s = 1.989 * 10^{30};$$

地球の質量;

$$m_e = 5.974 * 10^{24};$$

月の質量;

$$m_m = 7.348 * 10^{22};$$

ロケットの質量;

$$m_r;$$

すると3つの引力は次のようにあらわされます。

太陽の引力

$$F_s = \frac{G * m_s * m_r}{|rocket|^2} * (-) \frac{rocket}{|rocket|}$$

地球の引力

$$F_e = \frac{G * m_e * m_r}{|earth - rocket|^2} * (-) \frac{earth - rocket}{|earth - rocket|}$$

月の引力

$$F_m = \frac{G * m_m * m_r}{|moon - rocket|^2} * (-) \frac{moon - rocket}{|moon - rocket|}$$

ロケットの運動方程式は

$$m_r * rocket'' = f_s + f_e + f_m$$

となるので、両辺の共通項の m_r で割り、 x 成分 y 成分にわけて書くと

$$x''[t] = - \frac{G * m_s * x[t]}{((x[t])^2 + (y[t])^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * m_e * (x[t] - P \cos[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 - (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * m_r * (x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])}{((x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])^2 - (y[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y''[t] = -\frac{G * ms * y[t]}{((x[t])^2 + (y[t])^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * me * (y[t] - R \sin[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 - (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}} \\ - \frac{G * mr * (r[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])}{((x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])^2 - (y[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

となります。

3 ロケットの位置を求める

ロケットの初速度を {vx, vy} とすると mathematica の常微分方程式を解くコマンド NDSolve を利用して t 秒後のロケットの位置 {x[t], y[t]} をもとめます。ロケットの初速度を {vx, vy} とすると

kotae[vx_, vy_, t1_] := NDSolve[{

$$x''[t] = -\frac{G * ms * x[t]}{((x[t])^2 + (y[t])^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * me * (x[t] - P \cos[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 - (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}} \\ - \frac{G * mr * (x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])}{((x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])^2 - (y[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y''[t] = -\frac{G * ms * y[t]}{((x[t])^2 + (y[t])^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * me * (y[t] - R \sin[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 - (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}} \\ - \frac{G * mr * (r[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])}{((x[t] - R \cos[qt] - r \cos[wt])^2 - (y[t] - R \sin[qt] - r \sin[wt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

x[0] == 1.496*10^11 + 4.2*10^7, y[0] == 0, x'[0] == vx,
y'[0] == vy + q*(R + 4.2*10^7)}, {x, y}, {t, 0, t1}]

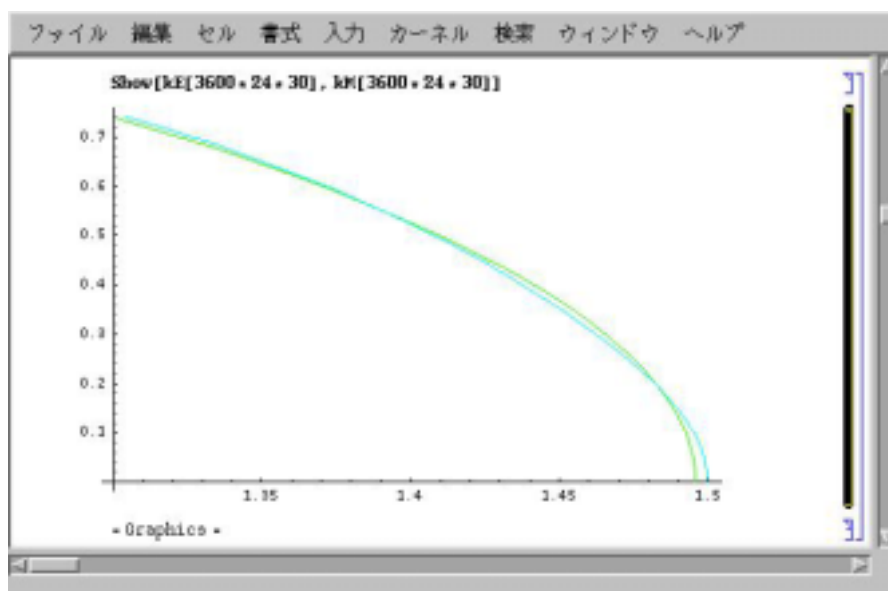
ロケットの軌道を kR, 地球の軌道を kE, 月の軌道を kM とすると

```
kR[vx_, vy_, t2_] :=  
  ParametricPlot[Evaluate[{rocket}/10^11 /. kotae[vx, vy, t2], {t, 0, t2}],  
    PlotStyle -> Hue[0]];  
kE[t3_] := ParametricPlot[{earth}/10^11, {t, 0, t3}, PlotStyle -> Hue[.3]];  
kM[t4_] := ParametricPlot[{moon}/10^11, {t, 0, t4}, PlotStyle -> Hue[.5]];
```

地球は緑色、月は水色、ロケットは赤色で表示されます。

4 グラフィック表示する.

さきほど定義した月の軌道 kR , 地球の軌道 kE を使って月と地球の軌道を 1 ヶ月表示すると

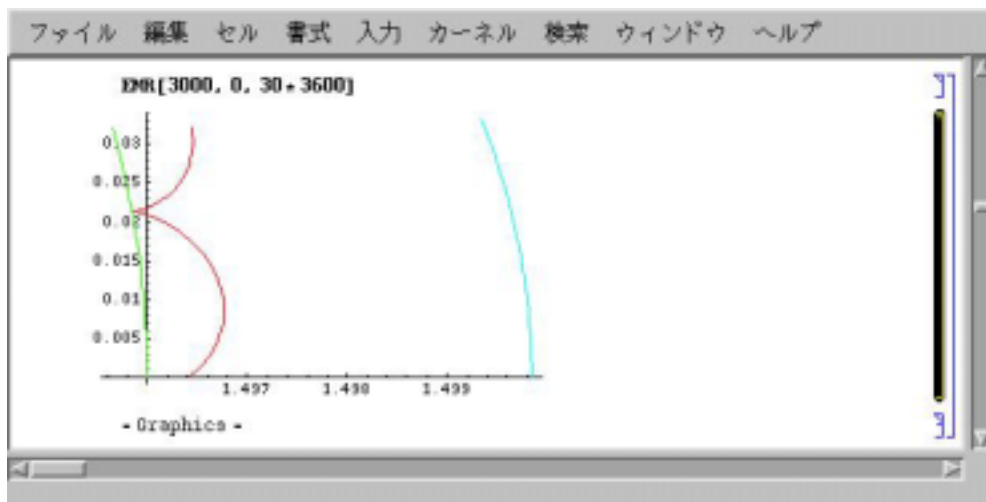


緑の線が地球の軌道で、水色の線が月の軌道です。地球の周りを月が上下しているので、月が地球の周りをまわっていることがよくわかります。

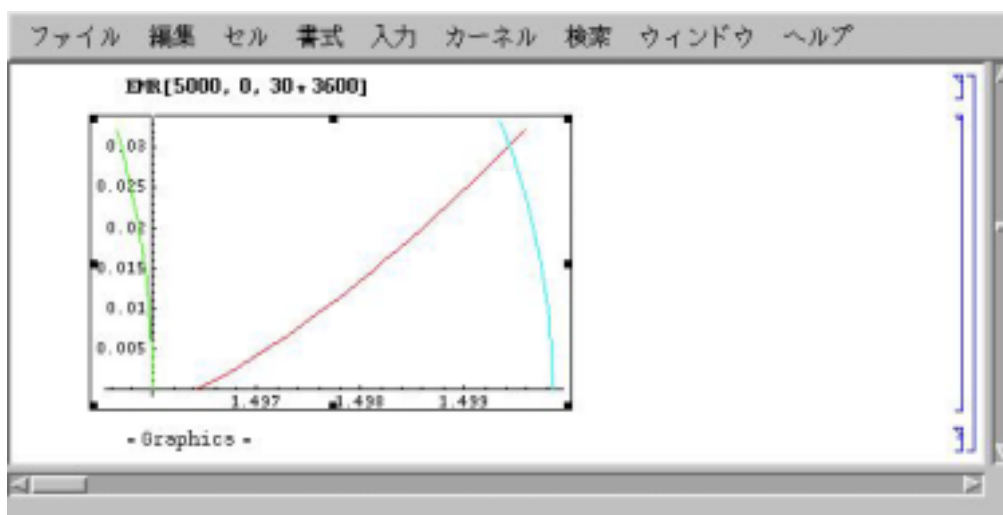
次に地球の軌道, 月の軌道, ロケットの軌道の 3 つとも表示させるコマンド EMR をつくります。

$EMR[vx_ , vy_ , t1_] := Show[kR[vx, vy, t1], kE[t1], kM[t1]]$

初速度 $vx = 3000$, $vy = 0$ で出発した場合の 30 時間までの軌道をあらわすと次のようになります。



このようになります。緑の線が地球の軌道、水色の線が月の軌道で、赤い線がロケットの軌道になります。このスピードではロケットは地球の引力をぬけだせず、ロケットが月まで到達していません。速度をあげると



このようにロケットは月まで行くことができました。

5 確認

月の軌道にロケットの軌道が重なりましたが、月が通過した後にロケットが通過したかもしれません。そこで座標軸を変化させ、地球と月を座標上に固定します。

座標を角速度 q で回転させて太陽と地球を x 軸で固定する

$$x1 = x \cos[q \cdot t] + y \sin[q \cdot t];$$

$$y1 = -x \sin[q \cdot t] + y \cos[q \cdot t];$$

地球を原点にする

$$x2 = x1 - R;$$

```
y2 = y1;
```

次に座標を角速度 w で回転させて月と地球を x 軸で固定する

```
x3 = x2*Cos[w*t] + y2*Sin[w*t];
```

```
y3 = -x2*Sin[w*t] + y2*Cos[w*t];
```

これを展開し、整理すると

```
x3 = x[t]*Cos[(q + w)*t] + y[t]*Sin[(q + w)*t] - R*Cos[w*t];
```

```
y3 = -x[t]*Sin[(q + w)*t] + y[t]*Cos[(q + w)*t] + R*Sin[w*t];
```

となります。

前回の章でもとめたロケットの軌道にこの座標を適応させるコマンドを `zR` とすると

```
zR[vx_, vy_, t2_] :=
```

```
  ParametricPlot[Evaluate[{x3, y3}/10^7 /. kotae[vx, vy, t2], {t, 0, t2}],
```

```
    PlotStyle -> Hue[0]];
```

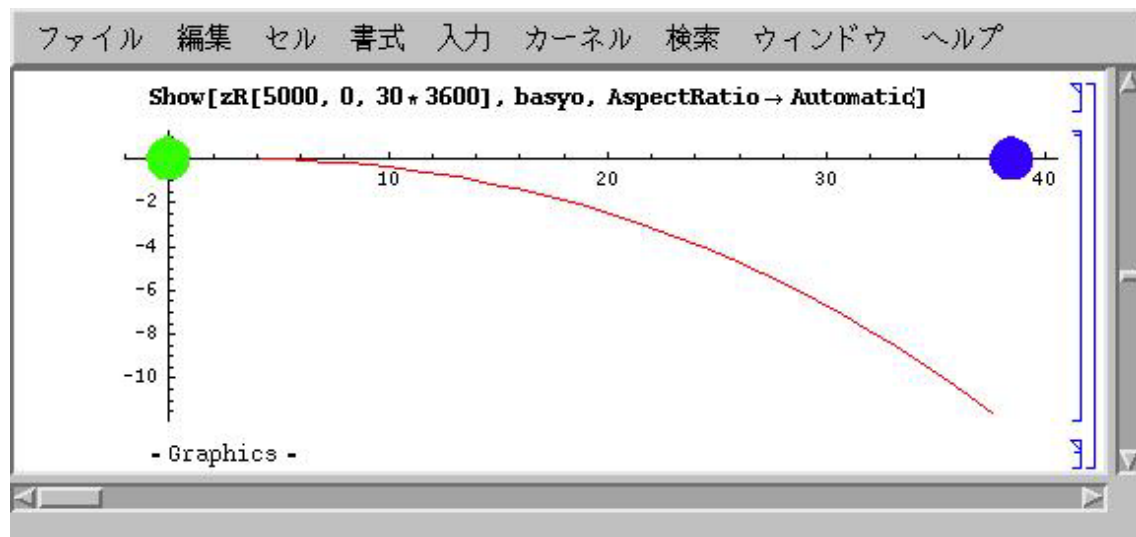
となります

次にわかりやすくするために地球と月の位置を明確にします。

```
basyo = Graphics[{{Hue[.3], Disk[{0, 0], 1.0}}, {Hue[.7],
```

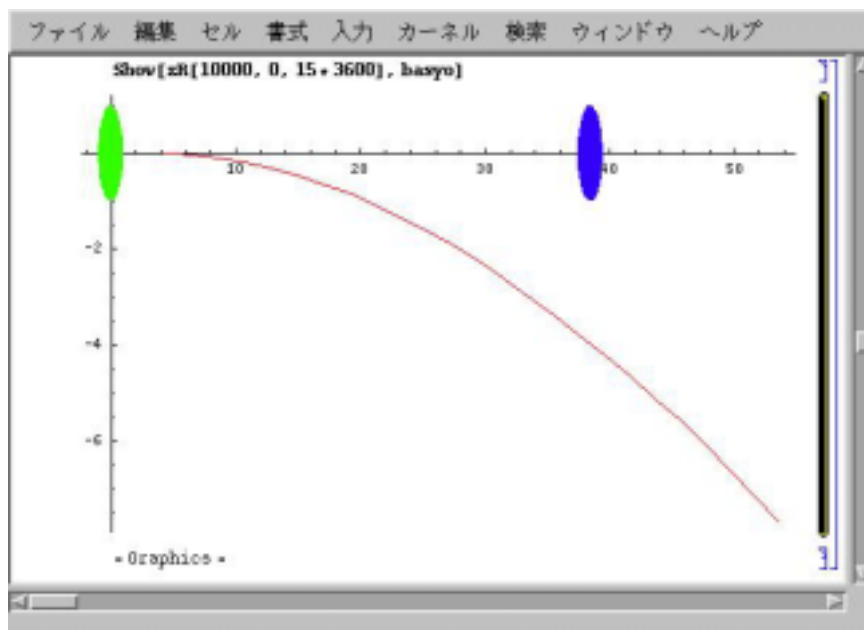
```
    Disk[{r/10^7, 0], 1.0}}];
```

前回の章で軌道が重なった速度に設定し、表示します。

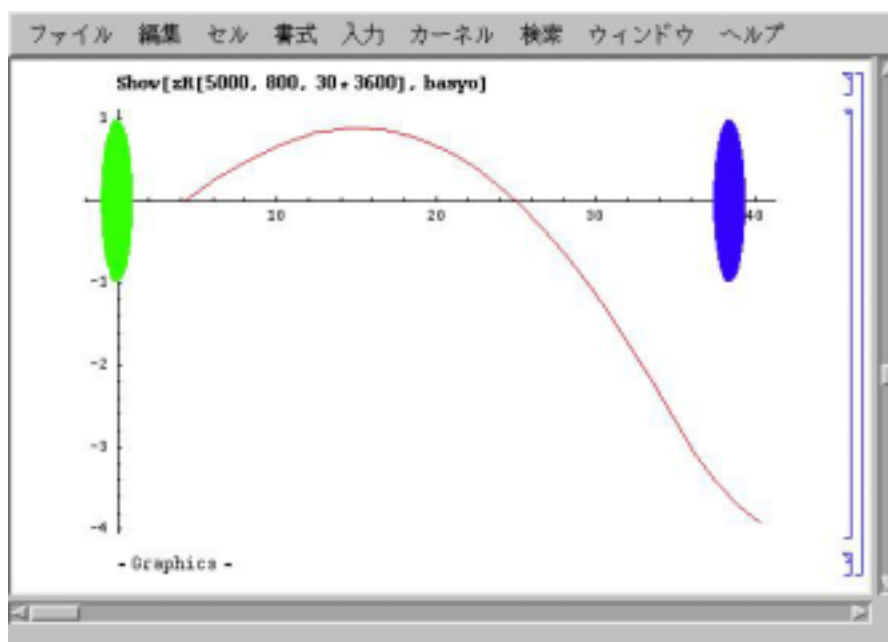


緑が地球の位置で、青がつきの位置です。ロケットは月の下側に行ってしまう、ロケットは月に到着していないのがわかります。

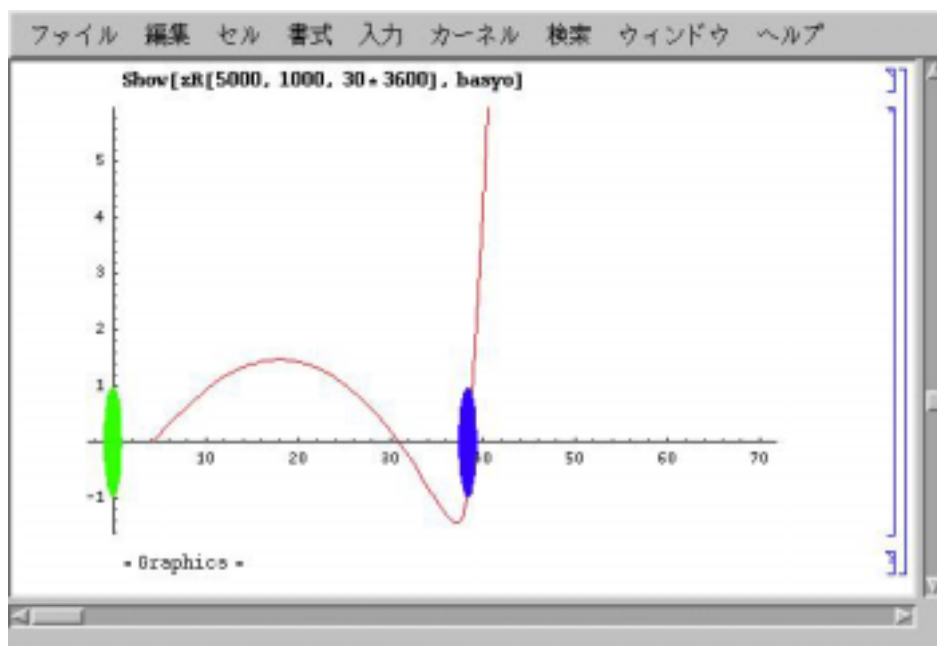
ロケットの速度をあげます。



地球と月の形が円ではないのはx軸とy軸の比率が違うからです。速度をあげてやると、誤差は小さくなりましたが、相変わらず月の下側を飛んでいます。よって、y軸方向の力がないとロケットは月には到着しないということがわかりました。y軸方向の初速度をあたえます。

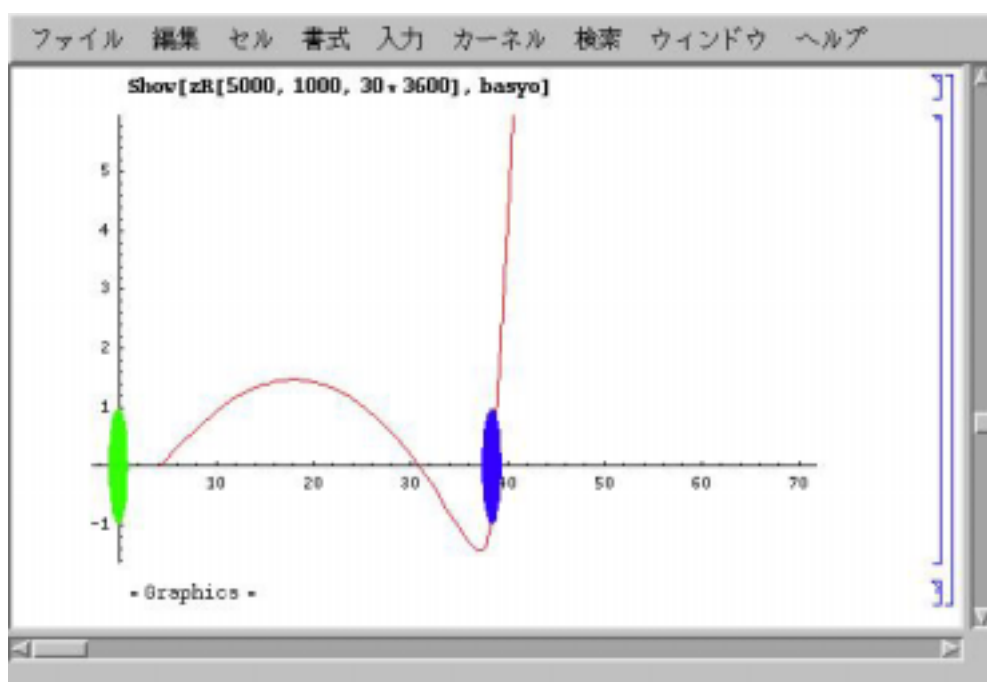


まだ月の下側を行っているので、y方向への初速度をあげてやります。

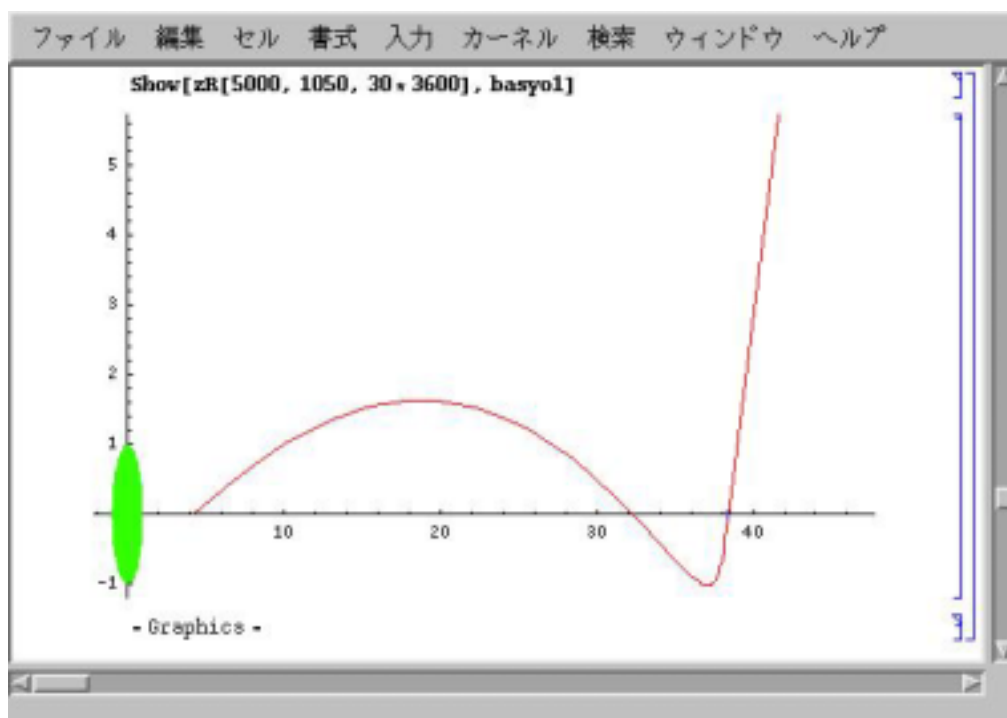


だいが近づいてきたので表示している月を小さくします.

```
basyo1 = Graphics[{{Hue[.3], Disk[{0, 0], 1.0}}, {Hue[.7],  
Disk[{r/10^7, 0], 0.1}}];
```

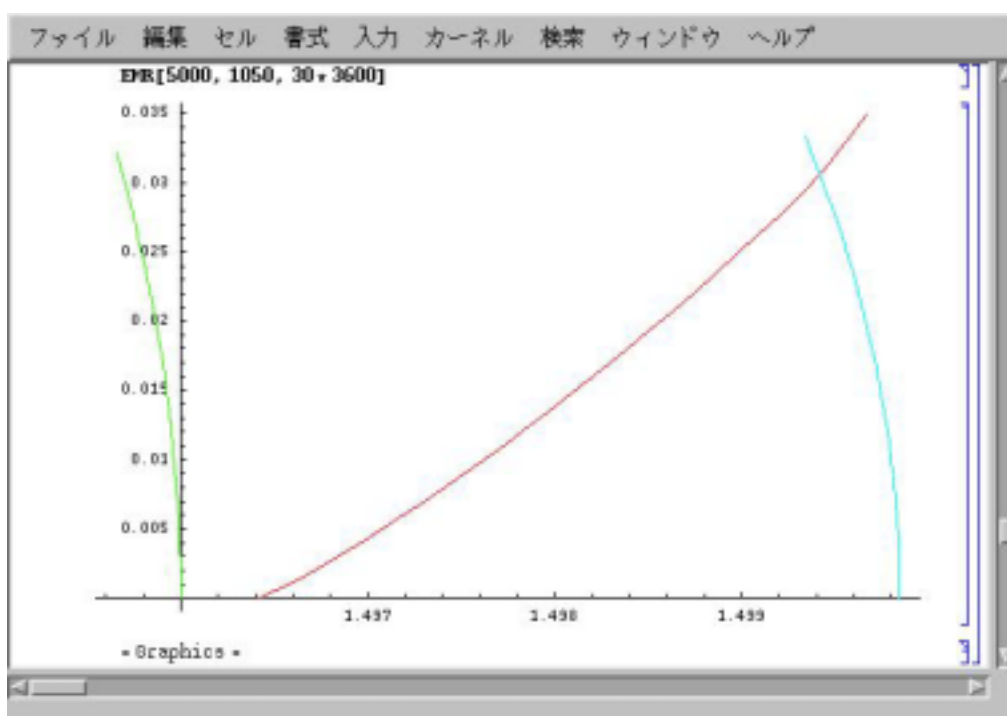


あと少しです.



ロケットが月の上を通過しました!

わかりやすく前の座標を動かさないで表示すると次のようになります.



上の赤い線が月に向かうロケットの軌道となります.

6 月の軌道

今までは月の軌道を円と決めていましたが,実際はそうではありません.まず新しく月の位置と地球の位置を定義します.

月の位置;

```
moon = {x[t], y[t]};
```

地球の位置;

```
earth = {R*Cos[q*t], R*Sin[q*t]};
```

月にかかる力は地球の引力と太陽の引力です.ロケットの時と同様に x 成分, y 成分にわけます.

$$x''[t] = \frac{G * m_s * x[t]}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * m_e * (x[t] - R \cos[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 + (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y''[t] = \frac{G * m_s * y[t]}{(x[t]^2 + y[t]^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{G * m_e * (y[t] - R \sin[qt])}{((x[t] - R \cos[qt])^2 + (y[t] - R \sin[qt])^2)^{\frac{2}{3}}}$$

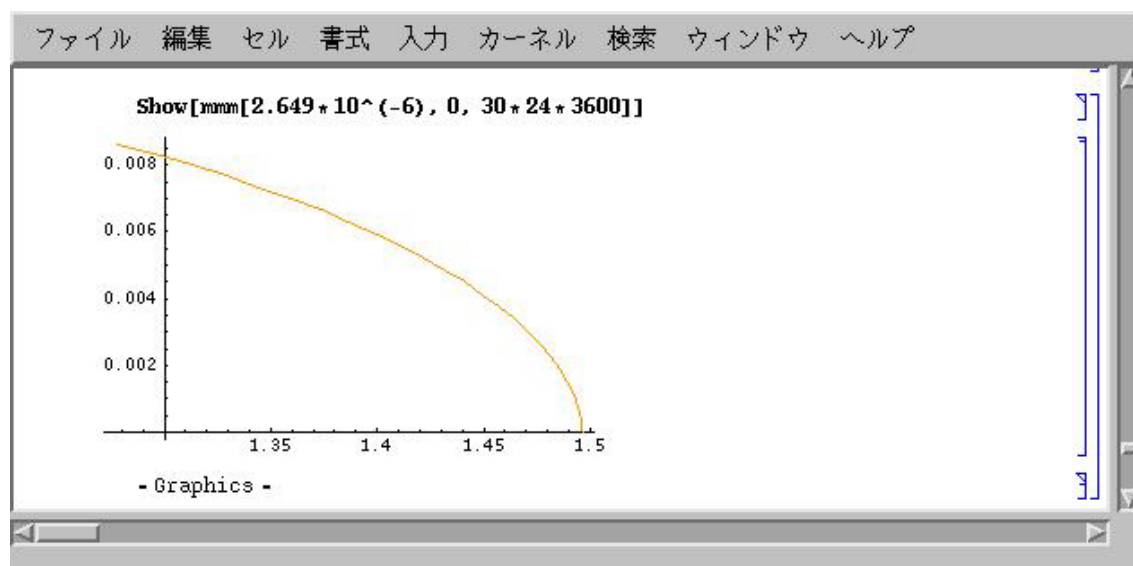
月の軌道を表示するコマンドをつくってやります.

```
mmm[vx_, vy_, t2_] :=
```

```
  ParametricPlot[Evaluate[{moon}/10^11 /. kaikai[vx, vy, t2], {t, 0, t2}],
```

```
  PlotStyle -> Hue[.1]];
```

初速度を月の角速度 w として 30 日間表示します.



このようになり, 本来は地球の周りを 1 周するはずなのですが, うまくいきませんでした.

7 感想

ロケットの初速度を設定し, 月への行き方を何通りも探そうとしましたがあまり見つかりま

せんでした.これは実際のロケットでは操縦しますが,今回のロケットは引力と初速度のみで動くために見付からなかったと思います.また, ロケットの軌道をわかりやすく, アニメーションで表示できればよかったです.月の軌道に関しては,月に働く力が足りなかったように思います.地球と月の引力だけでなく,他の惑星の引力や磁力などが関係していると考えます.またロケットの研究をしたことにより,宇宙にあるものは全て他の惑星からの引力を受けているにも関わらず,何万年も惑星同士がぶつかったりせず,均衡を保っている.あらためて宇宙のすごさを知りました。

参考文献 実験数学入門 山本芳彦著