

テント変換族とは何か

77 番 千石 直美

1. はじめに

離散力学系（カオス）の入門として、ロジスティック変換について学んだ。そこで、テント変換について検討を行う。また、Mathematica を用いてシミュレーションを行い、軌道の様子を確かめる。

2. 研究課題

テント変換の基本的な性質について検討を行う。さまざまな場合において軌道の漸近挙動を調べる。

3. 研究報告、考察

テント変換の定義を以下に示す。

$0 < a \leq 2$ に対して、変換 $f_a : [0,1] \rightarrow [0,1]$ とし、以下の式で示す。

$$f_a(x) := \begin{cases} a \times x & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -a \times x + a & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

このとき、 a をパラメータとするテント変換の集まりをテント変換族という。

そこで、パラメータの範囲を以下の3つの場合に分け、それぞれの場合について軌道の漸近挙動を検討した。

① $0 < a < 1$ の場合

$[0,1]$ 上の全ての初期値に対して、イテレーションを繰り返すことによって必ず不動点 0 に収束する。

② $a = 1$ の場合

$x \in [0, \frac{1}{2}]$ は全て不動点となっているの

でどんな初期値を与えてもすぐに不動点に辿り着き、軌道は明白である。

③ $1 < a \leq 2$ の場合

$A = [f_a^2(\frac{1}{2}), f_a(\frac{1}{2})]$ とする。

$x_0 \in [0, f_a^2(\frac{1}{2})) \cup (f_a(\frac{1}{2}), 1]$ の範囲を初期

値とする x_0 は、ある n_0 が存在して $n \geq n_0$ の時 $x_n \in A$ となる。つまり、イテレーションを繰り返すと必ず集合 A に入る。また一度集合 A に入ると、何度イテレーションを繰り返しても集合 A を抜けることはない。つまり、 $f_a(A) = A$ が成り立つ。これらは、図1左図からも明らかである。よって、範囲を A に制限した変換 $f_a|_A$ は以下に示す変換 g_a と同型であるといえる。変換 g_a は図1右図のような変換となる。

$$g_a(x) := \begin{cases} a \times x + 2 - a & x \in [0, 1 - \frac{1}{a}) \\ -a \times x + a & x \in [1 - \frac{1}{a}, 1] \end{cases}$$

これらの結果より、①②の場合の軌道は明白であり、③の場合は変換 g_a と同型であることが分かった。よってテント変換の軌道の漸近挙動は、変換 g_a の軌道を調べればよいことがわかった。

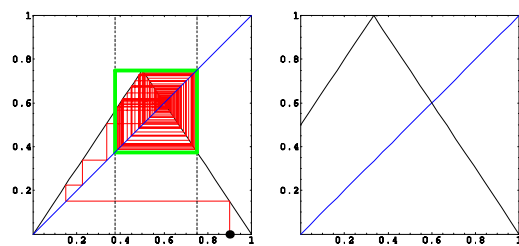


図1 変換 f_a ($1 < a \leq 2$) と変換 g_a

4. まとめ

テント変換と同型である変換 g_a を定義することによってさらに軌道の漸近挙動が詳しく検討できることがわかった。また、Mathematica を用いて実際にシミュレーションを行い、軌道の様子を図で示すことができた。