

# 情報システム工学科平成18年度後期 自主課題研究

## 研究テーマ：テント変換族とはなにか

025：嶋田 孝徳

平成19年2月7日

### 1 研究目的

- ・テント変換とはどういうものか理解する。
- ・テント変換の軌道はパラメータの値でどのように変化するか確認する。
- ・シャルコフスキーの定理を理解する。

### 2 研究方法

ゼミナール形式でテント変換族とその性質を輪講し、理論研究をする。また研究内容をグループ内で分担し、研究発表を行う。

### 3 研究結果

#### 3.1 テント変換

$0 \leq a \leq 2$  に対して、 $f_a: [0,1] \rightarrow [0,1]$  を

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -ax + x & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1)$$

と定義する。これをテント変換と呼びます。また  $a$  をパラメータといい、 $a$  が  $0 \leq a \leq 2$  の範囲のテント変換  $f_a(x)$  の集合をテント変換族といいます。

#### 3.2 テント変換の軌道

初期値  $x_0$  の写像  $f_a$  による軌道とは、 $f_a^n(x_0)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の集合のことをいいます。

テント変換  $f_a(x)$  のパラメータ  $a$  がそれぞれ、

$0 < a < 1$  のとき

$\forall x : x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = 0$  より  $f_a$  の不動点  $0$  に近付きます。

$a = 1$  のとき

任意の  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  は  $f_a$  の不動点となり、 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  に対して  $f_a(x) = 1 - x$  で全ての  $n$  ステップ目 ( $n > 1$ ) において  $f_a^n(x) = 1 - x$  となります。

$1 < a \leq 2$  のとき

$A := [a(1 - \frac{a}{2}, \frac{a}{2})]$  とすると、 $f_a(A) = A$ 。またある  $n$  が存在して  $f_a^n(x_0) \in A$  となります。

#### 3.3 シャルコフスキーの定理

自然数を

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2k - 1 \succ \dots$$

$$\succ 2 \times 3 \succ 2 \times 5 \succ 2 \times 7 \succ \dots \succ 2(2k - 1) \succ \dots$$

$$\succ 2^2 \times 3 \succ 2^2 \times 5 \succ 2^2 \times 7 \succ \dots \succ 2^2(2k - 1) \succ \dots$$

...

$$\succ 2^m \times 3 \succ 2^m \times 5 \succ 2^m \times 7 \succ \dots \succ 2^m(2k - 1) \succ \dots$$

...

$$\succ 2^m \succ 2^{m-1} \succ \dots \succ 2^2 \succ 2 \succ 1$$

このような順序で並べたものをシャルコフスキー列と言います。シャルコフスキーの定理は

定理 [ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を連続とするとき  $f$  が  $n$  周期点をもてば  $n > k$  であるすべての  $k$  に対して  $k$  周期点をもつ。]

ということが知られています。つまりシャルコフスキーの定理に従えば、 $n$  周期点をもてばシャルコフスキーの意味で  $n$  より小さい  $k$  に対して  $k$  周期をもつという定理です。

### 4 感想

ここではテント変換族の一部分しか述べていないが、ゼミナールでテント変換族の様々な性質を研究することができ、この分野において理解を深める事ができました。