

自主課題研究

Keane-Smorodinsky による Ornstein の同型定理の有限的証明

情報システム工学科 3 年 0 5 3 : 松平 ゆう大

1 まえがき

符号化に欠かせない、位相同型写像を生成するための Ornstein の同型定理について研究する。

2 研究課題

エントロピーが等しい 2 つのベルヌーイシフト間には位相同型写像 ϕ が生成される、という Ornstein の同型定理を、工学的に使いやすいよう有限的な場合に限った、Keane-Smorodinsky の証明を研究する。

3 研究方法

Keane-Smorodinsky の証明について書かれた論文を、LaTeX の文書へ起こしつつ研究し、教官とのゼミにおいて理解を深める。

4 結果と考察

エントロピーの等しい 2 つのベルヌーイシフト $B(p)$ と $B(q)$ において、まず符号 0 とその他の符号に分けて考え、マーカー補題を用いて写像が生成できることを証明した。

また、0 符号とその他の記号の骨組みを骨格と定義、骨格補題でその性質を示した。ここで、0 以外の符号をフィラーと呼び、フィラー同値について定義した。

このフィラーの同値類に注目し、ある骨格の階数 r の奇段階において、 $y = \phi x$ の対応する点に対してフィラーの同値類の集合へ関連付け、これを社会と呼んだ。偶段階においては逆方向への関連付けを同様に行った。

ここで組合せ論的結婚補題によって一つの段階から次の段階へと拡張を行って行けば、最終的に全体に対して関連付けを行うことができる。そして最後に、社会の列により構成される同型写像が有限的であることを割り当て補題を用いて示し、有限的な位相同型写像が生成できることをあらわした。

これによって Keane-Smorodinsky の証明を終えた。

この証明によって、例えばある文字列 x があったとき、エントロピーさえ等しければそれを別の文字列 y へ符号化を行うことができる。また、この符号化は位相同型写像であり、逆写像によって y から x へ復元することもできる。ということがわかる。

5 まとめと感想

研究の前提において確率統計の知識が必要になったが、前学期において確率統計の講義を受講していなかったため、苦勞をした。しかし、今回の研究によって確率統計の確率空間と写像に関するイメージは掴め、今振り返ると逆に一石二鳥であったと考えられる。また、数十枚にもおよび LaTeX の文書化によって、LaTeX の基礎をしっかりと身につけることができた。

しかし、逆に LaTeX の文書化に多くの時間を割くことになり、証明自体については完了できたが、その応用や、具体例についてまでは研究が進まなかった。これはすでにある論文の研究だからといって受身になっていた証拠である。他人の研究の、その借り物の研究になってしまったことは、大いに反省すべき点である。

さらにもう 1 枚、2 枚と自分の研究を重ね、発展させていくことを次回の目標として、自主課題研究のまとめとする。