

ω -limit 集合の分岐とテント変換族

054 番 明姓愛香

1. まえがき

テント変換について、軌道の漸近挙動を考察する。さらに、この軌道の極限が作り出す集合である ω -limit set の分岐図を描き、その性質を調べる。

2. 研究課題

$0 < a \leq 2$ において、
変換 $f_a : [0,1] \rightarrow [0,1]$ を

$$f_a(x) := \begin{cases} ax, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -ax + a, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

と定義し、これをテント変換と呼ぶ。

さらに、

$$O(a, x_0) := \{f_a^n(x_0) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$$

を変換 f_a による初期値 x_0 の軌道とすると、

$$\omega(a, x_0) :=$$

$$\{y \in [0,1] \mid \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} : f_a^{n_k}(x_0) \rightarrow y (k \rightarrow \infty)\}$$

で表される部分集合を ω -limit set (極限領域) と呼ぶ。

このとき、横軸にパラメータ a を、縦軸に各 a に対する ω -limit set をプロットした分岐図を描く。

3. 研究方法

Mathematica を用いてシミュレーションを行なう。テント変換における軌道の漸近挙

動について、くもの巣図、分岐図を描く。さらに、ロジスティック変換との比較を行なう。

4. 考察

- $2^{\frac{1}{2}} \leq a < 2$ のとき

ω -limit set は 1 個の区間からなる。

- $2^{\frac{1}{4}} \leq a < 2^{\frac{1}{2}}$ のとき

ω -limit set は $2(=2^1)$ 個の区間からなる。

- $2^{\frac{1}{8}} \leq a < 2^{\frac{1}{4}}$ のとき

ω -limit set は $4(=2^2)$ 個の区間からなる。

- $2^{\frac{1}{16}} \leq a < 2^{\frac{1}{8}}$ のとき

ω -limit set は $8(=2^3)$ 個の区間からなる。

よって、 $1 \leq a < 2^{\frac{1}{2}}$ の範囲では、 ω -limit set は 2 幂に分岐していく。そして、 $a \rightarrow 1$ とすると、その区間は $\frac{1}{2}$ に収束する。

5. まとめ

ロジスティック変換の軌道の ω -limit set は、区間の和になるとは限らず、時には窓も現れ、とても複雑である。

しかし、テント変換はすべての点で拡大的であり、どんな周期点も不安定となる。その意味では、単純な構造を持つといえる。