

文脈自由言語の周期点について

名列番号 056 : 南 健一

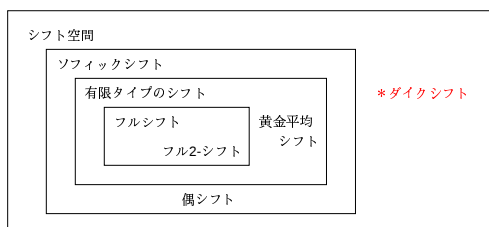
平成 19 年 2 月 2 日

目的

まず文脈自由言語の概要を理解し, 文脈自由言語の一つであるダイクシフトの周期点を持つ性質について文献調査を通して理解すること.

シフト空間

次の図は、シフト空間におけるダイクシフトの占める位置を示したものである。



ダイクシフト

ダイクシフトは文脈自由言語の一種である.

$$\Sigma = \{ (, [,),] \}$$

と置く. これらの関係は

$$(\cdot) = [\cdot] = 1, \quad (\cdot) = [\cdot] = 0$$

かつ,

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0 \quad (\alpha \in \{ (, [,),], 1 \})$$

ダイクシフト D は

$$D = \{ x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : i < j, \text{red}(x_{[i,j]}) \neq 0 \},$$

で定義できる.

文脈自由文法での表現

ダイクシフトを文脈自由文法で記述してみると、

$$\begin{aligned} G : A &\rightarrow A(B \mid A[B \mid B]A \mid B]A \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow (B) \mid [B] \mid BB \mid \epsilon \end{aligned}$$

となる.

周期点の数

$\mathcal{B}_n(X)$ によって, 長さ n で $\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n \in \Sigma^n$ の全てのブロックの集合を定義する. $P_n(X)$ は n 周期 (最小周期であ

る必要はない) の周期点の集合を定義し, $p_n(X) = \sharp P_n(X)$ を満たす. $q_n(X)$ は最小周期 n の周期点の個数と定義する.

例

$$\mathcal{B}_0(D) = \{\epsilon\}.$$

$$\mathcal{B}_1(D) = \{ (, [,),] \} = P_1(D) = Q_1(D).$$

$$\sharp \mathcal{B}_1(D) = p_1(D) = q_1(D) = 4.$$

$$\mathcal{B}_2(D) = \{ ((, ([, (, ([, ([, ([,))),),),), ([,]],]),] [,] \{.$$

$$P_2(D) = \{ ((, ([, (, ([, ([, ([,))),),),), ([,]],]),] [,] \{.$$

$$Q_2(D) = \{ ([, (, ([, ([, ([,))),),),), ([,]],]),] [,] \{.$$

$$\sharp \mathcal{B}_2(D) = 14, \quad p_2(D) = 12, \quad q_2(D) = 8.$$

$$\mathcal{B}_3(D) = \{ (((, (([, \dots$$

定理

$$p_n(D) = \begin{cases} 2\{3^n - \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{i} 2^i\} + \binom{n}{n/2} 2^{n/2} & \dots n \text{ が偶のとき.} \\ 2\{3^n - \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{i} 2^i\} & \dots n \text{ が奇のとき.} \end{cases}$$

$p_n(D) = \sum_{l|n} q_l(D)$ だから、メビウス関数 $\mu(n)$ を用いて

次の式を得る ;

$$q_n(D) = \sum_{l|n} \mu\left(\frac{n}{l}\right) p_l(D) \quad (*)$$

これはメビウス反転公式として知られている.

命題

$n \geq 3$ とする. このとき,

$$q_n(D) > 3^n.$$

$n = 1 \sim 8$ における $p_n(D)$, $q_n(D)$, 3^n の変化を下の表に示す.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_n(D)$	4	12	40	120	384	1152	3616	10848
$q_n(D)$	4	8	36	108	380	1104	3612	10728
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561

まとめ

ダイクシフトの周期点の個数はフル-3 シフトの周期点の個数よりも多くなることが分かった.