$f_4(x) = 4x(1-x)$ はカオス変換か？

3年 056番 牧野 匡成

1. まえがき

今回研究を始めるにあたって、ロジスティック変換について、授業およびゼミを通して学んだ。その中で接線分岐や二冪分岐などのテーマが挙げられたが、 $a=4$ のピュアカオスについてがもっとも興味が湧いたので、今回の研究テーマを「 $f_4 = 4x(1-x)$ はカオス変換か？」にしようと考えた。

2. カオスとは何か

カオスの定義

$f: I \rightarrow I$ の連続な写像で

- (1) f は初期条件に鋭敏に依存する。(初期鋭敏性)
- (2) f は位相的に推移的である。(位相的推移性)
- (3) 周期点は I において稠密である

以上の条件を満たせば f は I でカオス的だという。

3. 初期鋭敏性の証明準備

- ① $J(a_0 \cdots a_n)$ は区間になる。
- ② $J(a_0 \cdots a_n) \supset J(a_0 \cdots a_n a_{n+1})$
- ③ $f^{n+1} J(a_0 \cdots a_n) = [0,1]$
- ④ $|J(a_0 \cdots a_n)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
- ⑤ $x = \bigcap_{n=0}^{\infty} J(a_0(x) \cdots a_n(x))$

まず、初期鋭敏性を証明するために以上5つの性質の証明を行った。

4. 初期鋭敏性の証明

つづいて①～⑤に性質を用いて初期鋭敏性の証明を行った結果、 f_4 は初期鋭敏性をもつということを示すことができた。

5. (2)(3)の証明

初期鋭敏性の証明と類似の証明を行うことで、 f_4 は(2)および(3)の条件も満たすということを示すことができた。

6. 結論

以上より $f_4(x) = 4x(1-x)$ はカオス変換であるということがわかった。カオス変換はその定義から例外な点を除き、初期値 x_0 から出発した軌道は複雑な動きをする。

7. 感想

今回は実現できなかったが、カオス的な動きを用いることで、暗号を作ったり音を奏でたりなど、さまざまな応用の仕方もあるということを知り、いつかカオス的な動きを用いたものを作りたいと思った。また、研究はピュアカオスに絞ってしまったが、授業やゼミを通してロジスティック変換というものを学んだ。そこでは $f_a = ax(a-x)$ という何気ない関数から広がっていく数学の世界があるということを知り、 $a=4$ のケースだけではなく、2冪分岐や接線分岐など他のテーマに関しても今回の研究を生かし、今後自分で調べていけたらと思った。